Oliver Deiser

Essays zur Mengenlehre

Inhalt

Vorwort

In diesem Band sind kleinere Aufsätze zur Mengenlehre versammelt, deren Erstveröffentlichung bis ins Jahr 2000 zurückreicht. Sie wurden für diese Zusammenstellung überarbeitet und erweitert. Ziel ist, sie einem breiteren Publikum in einfacher und leicht zugänglicher Form zur Verfügung zu stellen. An dieser Stelle möchte ich den vielen Leserinnen und Lesern danken, die mich durch ihre positiven Rückmeldungen zum „Aleph1-Projekt" bestärkt haben, den Bestand an frei verfügbaren Texten kontinuierlich zu erweitern.

Die Essays können bei entsprechender Vorbildung für sich gelesen werden. Darüber hinaus sind sie als Ganzes eine Ergänzung meines Buchs „Einführung in die Mengenlehre".

Die beiden ersten Arbeiten „Diagonale Irritationen" und „Kennen Sie ω_1?" sind Versuche, die Mengenlehre in leichter Form einem breiteren Publikum näher zu bringen. Dabei wendet sich der erste Essay an interessierte Laien und Studienanfänger, der zweite an ein Publikum mit etwas größeren mathematischen Vorkenntnissen. Der dritte Essay kann als unabhängige Fortsetzung des zweiten angesehen werden. Er möchte die Verwendung der Ordinalzahlen und der transfiniten Rekursion wiederbeleben oder sie wenigstens als interessante Alternativen aufzeigen. Die Methode ist durch das Zornsche Lemma zurückgedrängt worden, hat aber nichts von ihrer Kraft und Schönheit verloren. Wer nicht nur bis ω zählen kann, ist im Vorteil.

Die drei folgenden Essays sind historisch-genetisch und in dieser Eigenschaft eine Ergänzung der „Einführung in die Mengenlehre". Sie wenden sich an Leserinnen und Leser, die an Details der geschichtlichen Entwicklung in der Periode von etwa 1870 bis 1930 und speziell am Werk von Georg Cantor interessiert sind. Die Themen sind die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen, das Multiplikationsproblem für unendliche Mengen und die Entwicklung des Kardinalzahlbegriffs. Bei der umfangreicheren letzten Arbeit spannt sich der Bogen von der antiken Mathematik bis zur formalen axiomatischen Mengenlehre des 20. Jahrhunderts.

München, im November 2023

Oliver Deiser

Bibliographische Notiz

Die Erstveröffentlichungen der hier versammelten Essays 1.1 – 1.3 und 2.1 – 2.3 sind (in chronologischer Aufzählung):

- 2001 *Kennen Sie* ω_1*?* DMV Mitteilungen (1/2001), 17 – 21.
- 2005 *Diagonale Irritationen – Der weite Raum einer Idee*. mathe-lmu.de 11 (2005), 25 – 31.
- 2005 *Der Multiplikationssatz der Mengenlehre*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 107 (2005), 89 – 109.
- 2007 *Ordinalzahlen in der Analysis und Maßtheorie*. Mathematische Semesterberichte 54 (2007), 177 – 197.
- 2008 „*In der Unvollkommenheit des ersten Conceptes*“*. Die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 110 (2008), 163 – 175
- 2010 *On the development of the notion of a cardinal number*. History and Philosophy of Logic 31/2 (2010), 123 – 143

1. Abschnitt

Überabzählbarkeit und transfinite Zahlen

1. Diagonale Irritationen – Der weite Raum einer Idee

Ein Mathematiker kommt in einem kleinen Dorf zum Barbier: „Sind Sie hier der berühmte Dorfbarbier?“, fragt er. Der Barbier lächelt und antwortet mit einem gewissen Stolz: „In der Tat, mein Herr. Ich schneide allen Leuten in unserem Dorf die Haare, die sich ihre Haare nicht selber schneiden – und nur denen.“

✯

Wir betrachten Folgen der Länge fünf, sogenannte Quintupel. Genauer betrachten wir nur Quintupel, deren Einträge Null oder Eins sind. Nehmen wir nun fünf solche Quintupel und schreiben sie zeilenweise untereinander. Wir erhalten dann ein Zahlenquadrat mit 25 0-1-Einträgen. Wir wollen konkret annehmen, dass wir das folgende Quadrat erhalten:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Unser drittes Quintupel ist also zum Beispiel gleich (0, 1, 1, 1, 0). Es ist nicht wichtig, dass alle fünf Quintupel verschieden sind. Wir schreiben einfach fünf beliebige Quintupel in dieser Form untereinander. Im Extremfall bekämen wir ein Quadrat mit lauter Nullen. Bleiben wir aber vorerst bei unserem ganz konkreten „typischen“ (5×5)-Quadrat mit 0-1-Einträgen.

✮

Die Menge aller Äpfel ist kein Apfel. Die Menge aller Bücher ist kein Buch. Die Menge aller Kataloge könnte man fast schon wieder als einen Katalog betrachten – es gibt ja auch mehrbändige Kataloge. Ganz sicher ist die Menge aller Vorstellungen aber wieder eine Vorstellung. Und die Menge aller Mengen ist auch wieder eine Menge. Oder?

✮ ✮

Als der Barbier mit der neuen Frisur des Mathematikers fertig ist, sagt der Mathematiker plötzlich: „Sie sind ein Lügner.“ „Warum?“, fragt der Barbier. „Schneiden Sie sich selber die Haare?“, fragt der Mathematiker zurück. „Nein“, sagt der Barbier, „natürlich nicht, das macht meine Frau.“ Der Mathematiker grinst: „Nach Ihrer Aussage müssten Sie sich dann aber die Haare doch selber schneiden.“ Nach einem kurzen Augenblick der Besinnung sagt der Barbier: „Sie haben recht. Ich werde mir also in Zukunft selber die Haare schneiden.“ „Dann aber“, sagt der Mathematiker, „widersprechen Sie erneut Ihrer Aussage…“.

✮ ✮

Es gibt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ aus Nullen und Einsen gebildete Quintupel. Es gibt also in unserem Fall 27 0-1-Quintupel, die keine Zeile unseres Quadrats sind. Wie finden wir möglichst einfach eines dieser 27 anderen Quintupel?

Es gibt hierzu eine geistreiche Methode, die interessanter ist als die ganze kombinatorische Problemstellung. Die Methode ist diese: Wir lesen die Diagonale des Quadrats als 0-1-Quintupel; wir erhalten so das Quintupel (0, 0, 1, 0, 0). Nun tauschen wir jede Null gegen eine Eins und umgekehrt, und erhalten

(1, 1, 0, 1, 1)

Dieses Quintupel ist von der ersten Zeile verschieden, weil sein erster Eintrag verschieden vom ersten Eintrag der ersten Zeile ist. Analoges gilt für die zweite, dritte, vierte und schließlich auch fünfte Zeile. Die Diagonale des „Negativs“ des Quadrats ist also keine Zeile des Quadrats. Der Leser wird sehen, dass die vierte Zeile unseres Quadrats, also (1, 1, 0, 0, 1) fast genau unser diagonales Negativ (1, 1, 0, 1, 1) ist. Lediglich an der vierten Stelle ist ein Unterschied – und dort muss, nach Konstruktion, auch ein Unterschied sein.

✮ ✮

Wir betrachten den vertrauten Mengenbegriff etwas genauer. Wie üblich schreiben wir „$x \in M$“, falls das Objekt x ein Element der Menge M ist. Ist x kein Element von M, so schreiben wir $x \notin M$.

Sind $x_1, \ldots, x_n$ endlich viele Objekte, so sei $M = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ die Menge dieser Objekte. Für alle Objekte y ist dann $y \in M$ äquivalent zu $y = x_1$ oder $y = x_2$ oder … oder $y = x_n$.

Es gilt etwa $\{ x, x \} = \{ x \}$. Mengen sind immer durch ihre Elemente vollständig bestimmt, und es gibt insbesondere keine Reihenfolge und kein mehrfaches Auftreten von Elementen wie etwa bei den Einträgen eines Quintupels.

Viel stärker als die Mengenbildung der Form $\{ x_1, \ldots, x_n \}$ ist die Mengenbildung über Eigenschaften: Ist φ eine Eigenschaft, so sei

$$M = \{ x \mid \varphi(x) \}$$

die Menge aller Objekte x, auf welche die Eigenschaft φ zutrifft. Es gilt dann für alle Objekte y: $y \in M$ genau dann, wenn $\varphi(y)$. Wir sammeln also genau diejenigen Objekte auf, für die φ gilt. Wir bilden so etwa die Mengen

$$\mathbb{N} = \{ x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl} \}$$

$$\{ x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl} \}, \quad \text{oder auch}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

Hier tauchen nun sofort sehr schwierige Fragen auf. Zunächst können wir nachhaken: Was genau ist eine Eigenschaft φ? Ebenso wahr wie tiefsinnig ist zudem folgende Überlegung: Wer Pilze sammelt, tut dies gewöhnlich in einem Wald. Wo eigentlich sammeln wir unsere Objekte bei der Mengenbildung? Gut, wir interessieren uns nur für mathematische Objekte, und nicht so sehr für Pilze. Aber die Frage bleibt: Wo existieren die Objekte der Mathematik? Was genau ist ein mathematisches Objekt? Erzeugen wir diese Objekte oder sind sie „schon da", als, so die philosophische Tradition, „Ideen"? Oder ist die Mathematik letztendlich nur eine schöne Illusion, die zwar real erscheint und auch viele reale Anwendungen hat, aber letztendlich nur ein Spiel mit Zeichen auf dem Papier ist, das nach bestimmten strengen Regeln gespielt wird?

✯ ✯ ✯

Barbier wie Mathematiker kommen zu dem Schluss: Es kann keinen Dorfbarbier geben, der genau denjenigen Dorfbewohnern die Haare schneidet, die sich selber nicht die Haare schneiden. Wir haben damit keine paradoxe Situation vor uns, sondern das Ergebnis einer kleinen, und so scheint es, belanglosen logischen Spielerei.

✯ ✯ ✯

Da es 32 verschiedene 0-1-Quintupel gibt, ist es nicht überraschend, dass wir ein Quintupel gefunden haben, das von allen fünf Zeilen unseres Quadrats verschieden ist. Interessant ist aber die verwendete Methode. Wir haben das Quadrat selber benutzt, um ein 0-1-Quintupel zu finden, das im Quadrat nicht vorkommt. Es birgt in sich die Information zu etwas, das es selbst nicht kennt: Es trägt die Information $(1, 1, 0, 1, 1)$ „fast offensichtlich" mit sich herum, aber es weiß, zeilenweise denkend, von dem Quintupel $(1, 1, 0, 1, 1)$ nichts.

☆ ☆ ☆

Die Frage nach der Existenz von Ideen ist ein zu weites philosophisches Feld, und wir wollen dieses Feld aus Angst vor der eigenen Courage auch gleich wieder verlassen und statt dessen die Mengenbildung über Eigenschaften an einigen Extremfällen weiter untersuchen – naiv, aber mathematisch.

Betrachten wir einmal die Eigenschaft „$x = x$", die sicher auf jedes Objekt x zutrifft. Diese Eigenschaft gibt Anlass zur Mengenbildung $M = \{ x \mid x = x \}$. Dann gilt $y \in M$ für alle Objekte y. Das ist sicher eine gewagte, gewaltige Konstruktion, aber warum nicht? M ist das „mathematische Universum". Wegen „$M = M$" gilt $M \in M$. Das ist ungewöhnlich, aber nicht unbedingt paradox. Die Mengenbildung über Eigenschaften führt eben in manchen Fällen zu Mengen, die sich selbst als Element enthalten.

Für die meisten Mengen M, die uns interessieren, gilt aber sicher $M \notin M$. So gilt etwa $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \notin \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \notin \mathbb{R}^2$ usw. Ja: Alle vertrauten mathematischen Beispiele, die uns einfallen, erfüllen „$x \notin x$". Diese Eigenschaft darf daher als eine Art von Regularität oder Gewöhnlichkeit angesehen werden. Betrachten wir nun das Reich R der Regularität:

$$R = \{ M \mid M \text{ ist Menge und } M \notin M \}$$

Wir fragen, ob die Menge R regulär ist: $R \in R$ oder $R \notin R$, das ist hier die Frage. Zunächst kann $R \in R$ nicht gelten, da R nur Mengen aufsammelt, die sich selber nicht enthalten. Also gilt $R \notin R$. Dann muss aber doch $R \in R$ gelten, da R alle Mengen aufsammelt, die sich selbst nicht enthalten, also auch R!

Das ist nun keine logische Spielerei mit Dorffriseuren mehr, sondern ein in bestechender Kürze und Klarheit erzeugter mathematischer Widerspruch.

Wir kommen zu dem Schluss, dass die Mengenbildung über Eigenschaften nicht für alle Eigenschaften möglich sein kann. Dies führt zwangsläufig zur Frage: Wann ist die Bildung der Menge $M = \{ x \mid \varphi(x) \}$ zulässig? Dürfen wir etwa $M = \{ x \mid x = x \}$ bilden? Und wenn nein, warum nicht? In dieser Konstruktion konnten wir keinen direkten Widerspruch finden. Allgemein lautet die Frage: Welche Mengen existieren?

Im dunklen Wald gleich neben der mathematischen Steppe tanzt nun aufdringlicher als je zuvor der philosophische Kobold, der uns peinigt: Sage mir, Mathematiker, der du dich deiner klaren Antworten rühmst und immer von „sei x dies und das Objekt" redest, was du genau damit meinst? – Wir müssen wegen solcher Fragen aber nicht in Panik geraten. Die Mathematik funktioniert, da gibt es gar keine Zweifel. Andererseits können wir auch nicht so tun, als sei nichts gewesen …

Dass wir die Konstruktion R in der Mathematik nicht wirklich brauchen, wäre kein guter Einwand gegen die Notwendigkeit einer genaueren Untersuchung der Mengenbildung. Die Zweifler haben jetzt die besseren Karten. Zunächst galt: Warum sollte die Bildung $\{ x \mid \varphi(x) \}$ nicht immer möglich sein? Jetzt gilt: Warum sollte die Bildung $\{ x \mid \varphi(x) \}$ nicht auch in vielen anderen Fällen zu Widersprüchen führen?

Ein einziger Widerspruch bedroht immer die ganze Mathematik. Ein Mathematiker kann gut mit überraschenden und kontraintuitiven Ergebnissen leben wie etwa der Existenz irrationaler Zahlen oder der Tatsache, dass es eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ gibt, die keinen Wert zweimal annimmt. Aber nicht mit $R \in R$ und $R \notin R$. Ein einziger Widerspruch raubt der Mathematik ihren Sinn: „ex contradictione quodlibet" nennt man diesen mathematischen Supergau auch, „alles kann aus einem Widerspruch abgeleitet werden".

Der Leser wird fühlen, dass alle drei Beispiele – der Friseur, die Quintupelkonstruktion, die Aufsammlung aller regulären Mengen – einer gemeinsamen Idee zu entspringen scheinen. In der mathematischen Logik wurde diese Gemeinsamkeit auf den Namen „Diagonalisierung" oder „Diagonalmethode" getauft, motiviert durch die Methode der Quintupelkonstruktion, die bei näherer Betrachtung auch den beiden anderen (offenbar eng miteinander verwandten) Beispielen zugrunde liegt.

Die Diagonalmethode ist historisch wie inhaltlich eng mit Grundlagenfragen der Mathematik verbunden, aber wir können diesen Fragen hier nicht besonders weit nachgehen. Wir wollen aber versuchen, frischrasiert und fern der philosophischen Großbaustellen, die Methode selber noch etwas eingehender zu untersuchen. Die vielen abenteuerlichen Routen, die sie eröffnet können wir bei dieser kurzen Hafenrundfahrt nur andeuten.

Der Satz von Cantor

Kehren wir zu unserem Zahlenquadrat zurück, und betrachten es in allgemeiner Form. Sei hierzu M eine beliebige Menge, und sei $f : M \to \{ 0, 1 \}$. Die Funktion f ordnet jedem Element von M entweder 0 oder 1 zu. Solche Funktionen können wir als Verallgemeinerung obiger Quintupel auffassen. Ein Quintupel lässt sich in der offensichtlichen Weise als Funktion

$f : \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} \to \{ 0, 1 \}$

auffassen:

$f(n)$ ist der n-te Eintrag des Quintupels für alle $1 \leq n \leq 5$.

Ist speziell M die Menge der natürlichen Zahlen, so können wir $f : M \to \{ 0, 1 \}$ als unendliche 0-1-Folge ansehen. Oben hatten wir fünf Quintupel, was fünf Funktionen $f_1, \ldots, f_5$ von $\{ 1, \ldots, 5 \}$ nach $\{ 0, 1 \}$ entspricht. Die Verallgemeinerung dieser Situation für beliebige Mengen lautet nun:

Sei M eine Menge, und für jedes $x \in M$ sei $f_x : M \to \{ 0, 1 \}$.

Wir betrachten also „M-viele" 0-1-Funktionen auf M – ganz so, wie wir zuvor fünf 0-1-Quintupel betrachten haben. Das System

$Q = \{ f_x \mid x \in M \}$

können wir uns mit ein wenig Phantasie als ein 0-1-Quadrat mit Seite M vorstellen. Wir wollen nun obigen Trick anwenden, und Q diagonalisieren. Wir definieren eine „Diagonalfunktion“ $d : M \to \{ 0, 1 \}$, indem wir für alle $x \in M$ festsetzen:

$$d(x) = 0, \quad \textit{falls} \quad f_x(x) = 1$$

$$d(x) = 1, \quad \textit{falls} \quad f_x(x) = 0$$

Dann gilt $d \neq f_x$ für alle $x \in M$. Denn zwei Funktionen sind nur gleich, wenn sie an allen Stellen übereinstimmen. Und für ein beliebiges x sind die Funktionen d und f_x an der Stelle x verschieden. Denn es gilt $d(x) \neq f_x(x)$ nach Konstruktion der Funktion d.

Wir sehen wieder, dass das System Q bestehend aus Funktionen

$$f_x : M \to \{ 0, 1 \}$$

genügend Information mit sich führt, um eine Funktion $d : M \to \{ 0, 1 \}$ definieren zu können, die im System Q selbst nicht auftaucht.

Im Fall einer endlichen Menge M mit genau n Elementen ist die Existenz einer solchen Funktion nicht überraschend, da eine einfache Überlegung zeigt, dass es genau 2^n Funktionen $f : M \to \{ 0, 1 \}$ gibt.

Wieviele Funktionen $f : M \to \{ 0, 1 \}$ für unendliche M gibt es aber? Sicher unendlich viele … Muss das genügen oder geht es genauer? Es steht keine kombinatorische Rechnung „2 hoch Anzahl der Elemente von M“ mehr zur Verfügung: 2^∞ ergibt keinen offensichtlichen Sinn. Aber die Diagonalmethode steht uns unverändert zur Verfügung. Halten wir fest, was wir oben durch Diagonalisierung von Q bewiesen haben:

Satz *(Satz von Cantor, um 1890)*

Sei M eine Menge, und für jedes $x \in M$ sei $f_x : M \to \{ 0, 1 \}$. Dann existiert eine Funktion $d : M \to \{ 0, 1 \}$ mit: $d \neq f_x$ für alle $x \in M$.

Wir wollen diesen Satz noch in eine etwas andere Form bringen.

Teilmengen und die Potenzmenge

Sind M, N Mengen, so heißt N eine Teilmenge von M, falls jedes Element von N auch ein Element von M ist. In Zeichen schreiben wir $N \subseteq M$. Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt die Potenzmenge von M und wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet. Es gilt also einfach:

$$\mathcal{P}(M) = \{ N \mid N \subseteq M \}$$

Für alle M sind die leere Menge $\emptyset$ und M selbst Teilmengen von M, es gilt also immer $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$. Weiter ist zum Beispiel $\mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$.

Einer Teilmenge N von M können wir leicht eine Funktion f von M nach

$\{ 0, 1 \}$ zuordnen und umgekehrt. Wir lesen hierzu „$x \in N$" als „$f(x) = 1$" und umgekehrt. Ist etwa $M = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ und $N = \{ 2, 4, 5 \}$, so gilt für die N zugeordnete 0-1-Funktion

$$f(2) = f(4) = f(5) = 1, \quad f(1) = f(3) = 0.$$

Ist $f : M \to \{ 0, 1 \}$, so ist die der Funktion f zugeordnete Teilmenge N von M einfach gleich der Menge $\{ x \in M \mid f(x) = 1 \}$.

Der Leser wird leicht einsehen, dass wir in dieser Weise $\mathcal{P}(M)$ und die Menge aller Funktionen $f : M \to \{ 0, 1 \}$ miteinander identifizieren können. Mit dieser Identifikation können wir unseren Satz nun so formulieren:

Satz *(Satz von Cantor, zweite Fassung)*

Sei M eine Menge, und für jedes $x \in M$ sei N_x eine Teilmenge von M. Dann ist $\mathcal{P}(M) \neq \{ N_x \mid x \in M \}$.

Genauer gilt: Die Menge $D = \{ x \in M \mid x \notin N_x \}$ ist eine von allen N_x verschiedene Teilmenge von M.

Es schadet nicht, den Satz in dieser Form noch einmal direkt zu beweisen. Sei also $x \in M$ beliebig. Wir zeigen, dass

$$N_x \neq D = \{ x \in M \mid x \notin N_x \}$$

Hierzu betrachten wir zwei Fälle.

Erster Fall: $x \in N_x$
In diesem Fall ist $x \notin D$, also $D \neq N_x$.

Zweiter Fall: $x \in N_x$
In diesem Fall gilt $x \in D$, sodass erneut $D \neq N_x$.

Damit ist der Satz beweisen.

Vielleicht sagen Sie nun:

> „Gut, es gibt eben auch für beliebige unendliche Mengen M in gewisser Weise viel mehr 0-1-Folgen auf M bzw. Teilmengen von M als Elemente von M. Das überrascht mich nicht, da wir M-oft eine 0-1-Entscheidung treffen können, und das ergibt eine gigantische Fülle an Möglichkeiten für unendliche Mengen M."

Ich werde mich also noch etwas anstrengen, um Sie davon zu überzeugen, von welcher Tragweite diese Entdeckung ist. Von den zahlreichen Pfaden, die der Satz von Cantor eröffnet, wollen wir zwei noch genauer erkunden. Den ersten hatten wir bereits durch einen Seiteneingang betreten …

Erster Pfad: Das Paradox

Sei nun $M = \{ x \mid x \text{ ist eine Menge} \}$. Für $x \in M$ sei weiter

$$N_x = \{ y \in M \mid y \in x \}$$

Die Menge N_x besteht also aus allen Elementen von x, die selber wieder Mengen sind. Besteht x ausschließlich aus Mengen, so ist sogar $N_x = x$.

Wir bilden wieder $D = \{ x \in M \mid x \notin N_x \}$. Dann gilt offenbar:

$$D = \{ x \mid x \text{ ist eine Menge mit } x \notin x \}$$

Wir wissen nach der zweiten Fassung des Satzes von Cantor, dass $D \neq N_x$ für alle $x \in M$ gilt. Und jetzt haben wir ein echtes Problem: D ist nach Definition eine Menge, die nur Mengen als Elemente enthält. Also gilt $N_D = D$. Aber es gilt doch $N_x \neq D_x$ für alle $x \in M$, speziell also $N_D \neq D$, da $D \in M$. Andererseits haben wir gerade $D = N_D$ bewiesen. Wo ist der Fehler in unserem Argument?

Die Antwort ist: Wir haben keinen Fehler gemacht. Es zeigt sich vielmehr, dass der Widerspruch im folgenden mengentheoretischen Axiom steckt, das wir naiv zugrundegelegt haben:

Komprehensionsaxiom

Ist $\mathscr{E}$ eine Eigenschaft, so existiert $M = \{ x \mid \mathscr{E}(x) \}$, d.h. es gibt eine Menge M derart, dass für alle Objekte y gilt: $y \in M$ genau dann, wenn $\mathscr{E}(y)$.

Wir müssen dieses Axiom aufgeben. Hier noch einmal, und so kurz wie möglich, das Argument, warum:

Die Paradoxie der Komprehension

Sei $\mathscr{E}(x)$ = „x ist Menge mit $x \notin x$", und sei weiter

$$M = \{ x \mid \mathscr{E}(x) \}$$

Für alle Mengen y gilt dann:

$$y \in M \text{ genau dann, wenn } y \notin y$$

Speziell gilt für M selbst:

$$M \in M \text{ genau dann, wenn } M \notin M$$

Widerspruch!

Diese Paradoxie haben unabhängig Bertrand Russell und Ernst Zermelo um 1900 entdeckt, indem sie, wie auch hier geschehen, die Cantorsche Diagonalmethode auf einen Spezialfall angewendet haben.

Erfahrungsgemäß ist dieses Konzentrat bei Erstgenuss schwer verdaulich, wenn es ohne Vorbereitung in dieser knappen Form serviert wird. Ich hoffe, dass der Leser nun aber sieht, dass das Argument – wie alle anderen hier vorgestellten Argumente – der Diagonalmethode entspringt, die in unserem Zahlenquadrat fast trivial erschien. Das gilt auch für den Barbier. Und so wie der Barbier seine Aussage zurücknehmen muss, müssen die Mathematiker das Komprehensionsaxiom zurücknehmen.

Zweiter Pfad: Größen des Unendlichen

Um gleich zu Beginn des Weges viel mit einem Satz zu sagen: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mathbb{R}$ sind in gewisser Weise ein und dasselbe. Denken Sie an eine reelle Zahl x in Binärdarstellung, etwa x = 0,001100101… Dann bilden die 1-Positionen der Darstellung eine Teilmenge $\{ 3, 4, 7, 9, \dots \}$ von $\mathbb{N}$. Umgekehrt kann man aus jeder Teilmenge N von $\mathbb{N}$ eine reelle Zahl in Binärdarstellung bilden, indem man genau die Positionen n der Darstellung gleich 1 setzt, die Elemente von N sind. Um aus dieser groben Hinundherübersetzung eine genaue Korrespondenz zwischen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mathbb{R}$ zu erhalten, ist noch Feinarbeit nötig. Aber im Wesentlichen haben wir mit dem Satz von Cantor den folgenden Satz schon mitbewiesen:

Satz *(Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)*

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei x_n eine reelle Zahl. Dann gibt es eine reelle Zahl d mit $d \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Auch hier können wir ganz unabhängig von allem, was bisher geschah, die Diagonalmethode direkt anwenden, um einen eigenständigen Beweis des Satzes zu erhalten:

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ sei, in Dezimaldarstellung:

$$x_n \;=\; \pm\, k_n,\, a_{n,\,0}\, a_{n,\,1}\, a_{n,\,2} \,\dots$$

mit $k_n \in \mathbb{N}$ und Nachkommastellen $a_{n,\,i} \in \{ 0, 1, \dots, 9 \}$ für $i \in \mathbb{N}$. (Für gewisse rationale Zahlen x gibt es zwei solche Darstellungen; wir können dann eine beliebige der beiden Darstellungen wählen.)

Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n \;=\; 1,\quad \textit{falls} \quad a_{n,\,n} \neq 1$$

$$b_n \;=\; 2,\quad \textit{falls} \quad a_{n,\,n} = 1$$

Sei $d = 0, b_0\, b_1\, b_2 \dots$ Die Zahl d hat eine eindeutige Dezimaldarstellung (da ihre Dezimalziffern gleich 1 oder 2 sind). Nach Konstruktion ist d von allen x_n verschieden. Damit ist d wie gewünscht.

Die reellen Zahlen können also nicht als $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ aufgelistet werden. Jede solche Liste lässt reelle Zahlen aus. Eine Menge, die mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummeriert werden kann, heißt *abzählbar* (dies schlißt alle endlichen Mengen mit ein). Andernfalls heißt sie *überabzählbar*. Wir haben gezeigt, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.

Ein Kontrast verschärft das Ergebnis: Die rationalen Zahlen sind abzählbar. Denn für jedes $k \in \mathbb{N}$ können wir die endlich vielen rationalen Zahlen q der Form $q = \pm\, n/m$ mit $n + m = k$ auflisten. Hängen wir alle diese endlichen Listen hintereinander, so ergibt sich eine Aufzählung aller rationalen Zahlen.

Wir können unsere Ergebnisse so aussprechen: Es gibt mehr reelle Zahlen als natürliche Zahlen, während es genausoviele natürliche wie rationale Zahlen gibt. Weiter gibt es für jede Menge M immer mehr Teilmengen von M als Elemente von M. Die genauen Definitionen hinter „mehr“ und „genausoviele“ sind hierbei:

Definition *(gleichmächtig, von größerer Mächtigkeit)*

Zwei Mengen M und N heißen *gleichmächtig*, falls es eine Funktion $f : M \to N$ gibt mit:

(1) Ist $x \neq y$, so ist $f(x) \neq f(y)$.

(2) Ist $z \in N$, so gibt es ein $x \in M$ mit $z = f(x)$.

Die Menge M heißt von *größerer Mächtigkeit* als N, falls gilt: M und N sind nicht gleichmächtig, aber es gibt eine Teilmenge von M, die gleichmächtig mit N ist.

So sind etwa $\mathbb{N}$ und $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade} \}$ gleichmächtig. Andererseits haben wir gezeigt, dass $\mathbb{R}$ in diesem Sinne substantiell größer als $\mathbb{N}$ ist. Allgemein ist $\mathcal{P}(M)$ immer größer als M, und speziell ist dann $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ noch einmal größer als $\mathbb{R}$.

Es gibt Größenunterschiede im Unendlichen! Und es ergeben sich viele Fragen. Cantor hat folgende Hypothese formuliert, die er nicht beweisen konnte:

Die Kontinuumshypothese

Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Widersprüche und Kontinuumshypothese

Die Grundlagenforschung innerhalb der Mathematik hat auf die Paradoxie der Komprehension wie folgt reagiert: Das Komprehensionsaxiom wird durch ein geeignetes System von Axiomen ersetzt, das viele Mengenbildungen zulässt, aber uferlose Mengenbildungen ausschließt. Alle bekannt gewordenen Widersprüche verschwinden in diesem System. Zudem hat sich das System als Axiomatik für die ganze Mathematik bewährt. Alle mathematischen Disziplinen, von der Algebra bis zur Zahlentheorie, lassen sich in diesem System interpretieren. Die naive Mengenlehre ist heute die Universalsprache des mathematischen Gedankenaustausches; ihre axiomatisch-logische Formulierung sein Protokoll.

Wie steht es aber mit der Cantorschen Kontinuumshypothese? Man weiß heute, und hier kommen subtile und komplizierte Methoden der mathematischen Logik ins Spiel, dass die Kontinuumshypothese in der gewählten Axiomatik – und damit in der üblichen Mathematik – weder widerlegbar noch beweisbar ist. Dieses Weder-Noch haben, je zur Hälfte, Kurt Gödel 1938 und Paul Cohen 1963 bewiesen. Das Resultat zählt zu den Kronjuwelen der Mathematik und funkelt vielfarbig im mathematischen wie philosophischen Licht betrachtet. Und im Ganzen bleibt der Eindruck: Mit der vertrauten Formel „Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen." beschwören wir einen Dämon, den wir uns zu Dienste machen können, den wir aber erst in Ansätzen begreifen.

2. Kennen Sie ω_1?

Ich möchte Ihnen das im Titel genannte Objekt „Omega 1" vorstellen und näherbringen. Es nimmt in der mengentheoretischen Forschung seit Cantor und Hilbert bis zum heutigen Tag eine besondere Stellung ein. ω_1 ist der Alpha-Centauri der Mengenlehre, es ist weit weg, aber durchaus in Reichweite. Machen wir uns also auf die Reise von den natürlichen Zahlen bis dorthin. Es ist ein Weg über Wohlordnungen.

Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Wohlordnungen spielen in der Mengenlehre eine ausgezeichnete Rolle. Eine lineare Ordnung $(P, <)$ ist eine *Wohlordnung*, falls jede nichtleere Teilmenge von P ein $<$-kleinstes Element besitzt. Wohlordnungen sind „Perlenketten", wobei Schlingen und unendlich absteigende Teilketten („nach links") nicht auftreten. Unendlich aufsteigende Teilketten („nach rechts") können dagegen in großer Zahl vorhanden sein.

Wohlordnungen sind durch ihre Länge bestimmt. Sind P_1 und P_2 Wohlordnungen, so ist P_1 ordnungsisomorph zu einem Anfangsstück von P_2 oder umgekehrt. Je zwei unserer Perlenketten können wir also nebeneinander legen und Perle für Perle einander zuordnen, bis wir das Ende einer der beiden Ketten erreicht haben. Diese Vergleichbarkeit ist das fundamentale Resultat über Wohlordnungen, und es ruft nach Repräsentanten für Wohlordnungen mit gleicher Länge. Hier kommen die Ordinalzahlen ins Spiel: Eine Menge α heißt *Ordinalzahl* (nach John von Neumann und Ernst Zermelo), falls gilt:

α ist transitiv und $(\alpha, \in)$ ist eine Wohlordnung.

Die $\in$-Relation spielt also die Rolle der Ordnung $<$. Eine Menge M heißt hierbei *transitiv*, falls für alle $x \in M$ gilt, dass $x \subseteq M$. Das „Hab und Gut" des Lesers ist ein naives Beispiel für eine transitive Menge: Mit einer Sache besitzen Sie auch alle Teile dieser Sache.

Es lässt sich beweisen, dass jede Wohlordnung ordnungsisomorph zu einer eindeutigen Ordinalzahl ist. Die Ordinalzahlen bilden das Rückgrat der Wohlordnungen.

Jede Ordinalzahl besteht ausschließlich aus Ordinalzahlen und für α, β definieren wir $\alpha < \beta$ durch $\alpha \in \beta$. Die Ordinalzahlen werden dadurch wohlgeordnet und es gilt stets $\alpha = \{ \beta \mid \beta < \alpha \}$. Eine Ordinalzahl ist die Menge ihrer Vorgänger.

Wie sieht diese Ordnung aus? Die ersten Ordinalzahlen sind die mengentheoretisch definierten natürlichen Zahlen:

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{ 0 \}, \quad 2 = \{ 0, 1 \}, \quad 3 = \{ 0, 1, 2 \}, \quad \dots$$

$$n + 1 = n \cup \{ n \} = \{ 0, \dots, n \}, \quad \dots$$

Die Menge $\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$ der natürlichen Zahlen bildet die nächstgrößere Ordinalzahl und wird mit $\mathbb{N}$, ω oder auch ω_0 bezeichnet.

Allgemein kommen wir von einer Ordinalzahl α zur nächstgrößeren durch die Operation

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{ \alpha \} \qquad \textit{(Nachfolgerbildung)}$$

Und wenn Γ eine Menge von Ordinalzahlen ist, so ist

$$\bigcup \Gamma = \{ \beta \mid \beta \in \alpha \text{ für ein } \alpha \in \Gamma \} \qquad \textit{(Supremumsbildung)}$$

eine Ordinalzahl und das Supremum von Γ. Ist Γ leer, so erhalten wir $\bigcup \Gamma = 0$. Hat Γ ein größtes Element α, so ist $\bigcup \Gamma = \alpha$. Ist Γ nichtleer und ohne ein größtes Element, so ist $\lambda = \bigcup \Gamma$ eine *Limesordinalzahl*. Diese Ordinalzahlen haben keinen direkten Vorgänger. ω ist die erste Limesordinalzahl.

Nach ω kommen

$$\omega + 1, \quad \omega + 2 = (\omega + 1) + 1, \quad \dots, \quad \omega + n, \quad \dots$$

Das Supremum dieser Zahlen ist die zweite Limesordinalzahl $\omega + \omega = \omega \cdot 2$. Diese Perlenkette besteht aus zwei Kopien der natürlichen Zahlen. Weiter geht es mit

$$\omega + \omega + 1, \quad \dots, \quad \omega + \omega + \omega = \omega \cdot 3, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \omega \cdot n, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots$$

Als Supremum erhalten wir $\omega + \omega + \omega + \dots = \omega \cdot \omega = \omega^2$. Dieser Typ ist noch recht anschaulich: Ordnen wir $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ lexikographisch, so erhalten wir eine Wohlordnung des Typs ω^2. Nach ω^2 kommen

$$\omega^2 + 1, \ \omega^2 + 2, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \omega^2 + \omega\, n + k, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots,$$

mit beliebigen natürlichen Zahlen n und k. Die Fortführung dieses Zählens liefert die Potenzen ω^n. Sie lassen sich erneut vereinigen:

$$\omega^3, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \omega^n, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \omega^\omega$$

Nun erhalten wir Türme von ω-Potenzen, die zu einer Ordinalzahl führen, die einen neuen Namen bekommt:

$$\omega^\omega, \quad \dots, \quad \omega^{(\omega^\omega)}, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \varepsilon_0$$

Von ε_0 geht es weiter mit $\varepsilon_0 + 1$ usw. usf.

ω_1 und die Kontinuumshypothese

Alle Ordinalzahlen, die wir auf diese Weise erreichen, haben etwas gemeinsam: Sie sind alle endlich oder abzählbar unendlich. Es gibt aber eine kleinste Ordinalzahl, die nicht mehr abzählbar ist, und diese ist ω_1. Ihre Existenz lässt sich mit Hilfe der Basisaxiome der Mengenlehre ZFC, der Zermelo-Fraenkel Axiomatik mit Auswahlaxiom, herleiten. Es gilt also

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \min \{ \alpha \mid \alpha \text{ ist Ordinalzahl und } \alpha \text{ ist überabzählbar} \} \\ &= \sup \{ \alpha \mid \alpha \text{ ist Ordinalzahl und } \alpha \text{ ist abzählbar} \}\end{aligned}$$

ω_1 verhält sich zu „abzählbar" wie $\mathbb{N}$ zu „endlich". Das ist sicher eine herausragende Stellung.

ω_1 taucht in der berühmten Cantorschen Kontinuumshypothese (CH) in natürlicher Weise auf. Diese Hypothese lässt sich so formulieren:

Die Kontinuumshypothese (CH)

Es gibt eine Bijektion zwischen ω_1 und $\mathbb{R}$.

Diese Formulierung von (CH) ist äquivalent zu der bekannten Form: „Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$."

Wahrscheinlich werden Sie davon gehört haben, dass die Kontinuumshypothese im Rahmen der üblichen Mathematik weder beweisbar noch widerlegbar ist. Dieses fundamentale Resultat haben Kurt Gödel (1938) und Paul Cohen (1963) gezeigt. „Im Rahmen der üblichen Mathematik" bedeutet: Mit Hilfe der Axiome der Mengenlehre ZFC. Die Kontinuumshypothese (CH) und ihre Verneinung $\neg$(CH) liegen außerhalb der Folgerungen, die wir aus unseren mathematischen Grund-Intuitionen ziehen können.

Dabei setzen wir stillschweigend voraus, dass ZFC widerspruchsfrei ist. Denn andernfalls ist alles beweisbar, also sowohl (CH) als auch $\neg$(CH). Die Widerspruchsfreiheit von ZFC selbst ist nach den Gödelschen Unvollständigkeitessätzen in ZFC nicht beweisbar. Eine hinreichend starke Axiomatik muss mit der Gefahr von Widersprüchen leben.

Werden wir je erfahren, wie groß $\mathbb{R}$ ist? Ist eine unlösbare Hypothese überhaupt wahr oder falsch? Gibt es starke neue Axiome, die (CH) entscheiden? Welche Auswirkungen auf die Mathematik haben sie?

Zurück zu ω_1, der ersten überabzählbaren Ordinalzahl. Dieser Zahl kommt eine ähnliche Faszination zu wie der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Vielleicht ist ω_1 kleiner als $\mathbb{R}$, vielleicht aber auch gleichmächtig zu $\mathbb{R}$. Wir haben nur die Definition. Um ω_1 besser zu verstehen, betrachten wir Abschluss-Prozesse.

Ein Abschluss-Prozess der Länge ω

Hier ist ein einfaches Problem. Sei X eine beliebige nichtleere Menge. Weiter seien $f : X \to X$ eine Funktion und $X_0 \subseteq X$.

Frage

Was ist das $\subseteq$-kleinste $Y \subseteq X$ mit den Eigenschaften:

(i) $X_0 \subseteq Y$

(ii) $f | Y : Y \to Y$?

Dabei ist $f | Y$ die Einschränkung der Funktion f auf die Menge Y. Die Notation $f | Y : Y \to Y$ besagt, dass die Menge Y abgeschlossen unter f ist, d.h. es gilt $f(y) \in Y$ für alle $y \in Y$.

Jeder Mathematiker sieht schnell, dass Y existiert, und gibt wahrscheinlich eine der beiden folgenden Antworten.

Antwort A

$Y = \bigcap \{ Y' \subseteq X \mid Y' \text{ erfüllt (i) und (ii)} \}$

Dies ist die harte Lösung des Problems „von oben". Die Überlegung ist hier: X selbst erfüllt (i) und (ii), und diese beiden Bedingungen sind schnittstabil. Feiner als „separate and cut" ist jedoch die Lösung „von unten":

Antwort B

$Y =$ „der Abschluss von X_0 unter f"

Hierzu definieren wir rekursiv

$X_{n+1} = X_n \cup f[X_n]$ für $n \in \omega$

und setzen

$Y = \bigcup_{n \in \omega} X_n$

Wir fügen zu X_0 das Bild $f[X_0]$ von X_0 unter f hinzu, und erhalten X_1. Dann fügen wir das Bild $f[X_1]$ von X_1 unter f hinzu usw.

Die Kenntnis der Rekursion über die natürlichen Zahlen vorausgesetzt, sind die Beweise der Korrektheit der beiden Antworten jeweils elementar. Die zweite Methode zur Identifizierung von Y liefert eine $\subseteq$-aufsteigende Folge

$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots$

von *Approximationen* an Y. Damit können wir eine Funktion $\delta : Y \to \omega$ definieren, die die minimale Anzahl von Schritten angibt, die notwendig ist, um ein gegebenes $y \in Y$ von X_0 aus mittels der Funktion f zu erreichen. Wir setzen hierzu $X_{-1} = \emptyset$ und definieren für alle $y \in Y$:

$\delta(y)$ = „das eindeutige $n \in \omega$ mit $y \in X_n - X_{n-1}$“

Fassen wir $G = (X, f)$ als einen gerichteten Graphen auf (mit Kanten von x nach f(x) für alle Ecken $x \in X$), so ist

$$\delta(y) = d(y, X_0) = \min \{ d(y, x) \mid x \in X_0 \}$$

mit dem üblichen Abstand d auf G.

Die Darstellung $Y = \bigcup_{n \in \omega} X_n$ erlaubt zudem Induktionsbeweise über Y: Wir können für eine Eigenschaft φ die Aussage $\forall x \in Y\ \varphi(x)$ zeigen durch einen induktiven Beweis von $\forall n \in \omega\ \forall x \in X_n\ \varphi(x)$.

Solche Vorteile hat die erste Antwort nicht zu bieten. Die zweite Methode rollt die gesuchte Menge wie einen unendlichen Teppich vor uns aus und zeigt uns dadurch, wie sie aufgebaut ist. Die Menge Y erscheint in geschichteter Form, die Mengen X_n entsprechen den Baumringen eines Baumstamms.

Analoge Konstruktionen von „oben und unten“ tauchen in der Mathematik auch an anderen Stellen auf. Würden Sie den von zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Unterraum als Schnitt aller Unterräume definieren, die die beiden Vektoren enthalten? Die alternative Spann-Darstellung liefert ein klareres Bild über diesen Unterraum. Welche der beiden Darstellungen zur Definition verwendet wird und welche dadurch zum Satz wird, spielt letztendlich keine Rolle. Wichtig ist, dass es die „ausbreitende Darstellung“ von unten gibt.

Der obige Abschluss-Prozess zur Gewinnung von Y hat die Länge ω: Nach ω-vielen vielen Schritten bilden wir die Vereinigung aller Schichten X_n und sind fertig. Bei komplexeren Konstruktionen kann es nun vorkommen, dass ω-viele Schritte nicht ausreichen. Ein Fall, bei welchem unsere erste überabzählbare Ordinalzahl ω_1 als Länge der Rekursion erscheint, taucht bei einem Grundbegriff der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie auf. Wir beschränken uns hier auf die reellen Zahlen und erinnern an folgenden Begriff: Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ heißt eine σ-*Algebra* auf $\mathbb{R}$, wenn gilt:

(1) $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$

(2) $A \in \mathcal{A}$ *impliziert* $A^c = \mathbb{R} - A \in \mathcal{A}$

(3) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abzählbar *impliziert* $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$

Die einfachsten σ-Algebren auf $\mathbb{R}$ sind $\{ \emptyset, \mathbb{R} \}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Weiter ist

$\mathcal{A}$ = { $A \subseteq \mathbb{R}$ | A ist abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ }

eine σ-Algebra. Gilt die Kontinuumshypothese, so gilt $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Andernfalls ist $\mathcal{A}$ echt kleiner als $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Die vielleicht wichtigste σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ entsteht aus den offenen und abgeschlossen Mengen. Diese σ-Algebra betrachten wir nun genauer.

Ein Abschluss-Prozess der Länge ω_1

Sei $\mathbb{O}$ das System der offenen Mengen auf $\mathbb{R}$.

Frage

Was ist das $\subseteq$-kleinste $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften:

(i) $\mathbb{O} \subseteq \mathcal{A}$

(ii) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}$?

Antwort A

$\mathcal{A} = \bigcap \{ \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \mathcal{A}' \text{ erfüllt (i) und (ii)} \}$

Antwort B

$\mathcal{A}$ = „der Abschluss von $\mathbb{O}$ unter abzählbaren Vereinigungen und Komplementbildung"

Für die zweite Antwort definieren wir rekursiv zwei ω_1-Folgen

$\langle \Sigma_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ und $\langle \Pi_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$.

Solche transfiniten Rekursionen verlaufen analog zu Rekursionen über den natürlichen Zahlen: Zur Definition von Σ_α dürfen wir auf *alle* Σ_β zurückgreifen mit $\beta < \alpha$. Ein allgemeiner Satz von John von Neumann besagt, dass solche rekursiv definierten Objekte eindeutig existieren.

Rekursionsanfang

$\Sigma_0 = \mathbb{O}$, $\quad \Pi_0 = \{ \mathbb{R} - A \mid A \in \Sigma_0 \} = \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ist abgeschlossen} \}$

Rekursionsschritt

Sei $\alpha < \omega_1$, und seien Σ_β, Π_β konstruiert für alle $\beta < \alpha$. Wir setzen

$\Sigma_\alpha = \{ \bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ ist eine abzählbare Teilmenge von } \bigcup_{\beta < \alpha} (\Sigma_\beta \cup \Pi_\beta) \}$

$\Pi_\alpha = \{ \mathbb{R} - A \mid A \in \Sigma_\alpha \}$

Dann ist

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha$$

die gesuchte σ-Algebra. Es ist leicht nachzuweisen:

(+) $\Sigma_\beta \subseteq \Sigma_\alpha$, $\Sigma_\beta \subseteq \Pi_\alpha$, $\Pi_\beta \subseteq \Sigma_\alpha$, $\Pi_\beta \subseteq \Pi_\alpha$ für alle $\beta < \alpha < \omega_1$

Wir erhalten also eine Hierarchie von Mengensystemen, die $\mathcal{A}$ ausschöpfen.

Bemerkungen zur Konstruktion

Die Mengen $\Sigma_\alpha \cup \Pi_\alpha$ für $\alpha < \omega_1$ sind unsere Approximationen an das gesuchte $\mathscr{A}$. Die Definition von Σ_0 und Π_0 ist klar. Nun schließen wir die Menge $\Sigma_0 \cup \Pi_0$ unter abzählbaren Vereinigungen ab. Danach bilden wir Komplemente. Dadurch gibt es unter Umständen neue abzählbare Vereinigungen. Also schließen wir unsere Approximation wieder unter diesen Vereinigungen ab und bilden Komplemente usw. Aber auch nach ω-vielen Schritten sind wir nicht fertig: Bilden wir

$$\mathscr{C} = \bigcup_{n \in \omega} (\Sigma_n \cup \Pi_n),$$

so existieren (wie sich mit einem Diagonalargument nachweisen lässt) Mengen $A_n \in \Sigma_n \cup \Pi_n$ für $n \in \omega$ mit

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n \notin \mathscr{C}.$$

Also müssen wir erneut unter abzählbaren Vereinigungen abschließen usw. usf. Die Präzisierung von „usw. usf." sind hier die abzählbaren Ordinalzahlen.

Warum sind wir nach ω_1-vielen Schritten fertig? Um dies einzusehen, betrachten wir eine abzählbare Menge

$$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha.$$

Jeder Menge B in $\mathscr{B}$ können wir ihren Konstruktionsindex zuordnen, also das kleinste $\alpha < \omega_1$ mit $B \in \Sigma_\alpha \cup \Pi_\alpha$. Wir erhalten dadurch abzählbar viele Indizes, und das Supremum σ dieser Indizes ist kleiner als ω_1. Denn ω_1 ist nicht in abzählbar vielen Schritten von unten erreichbar, da die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Ordinalzahlen abzählbar ist. Dann wird aber $\bigcup \mathscr{B}$ spätestens an der Stelle $\sigma < \omega_1$ konstruiert. Also ist $\bigcup \mathscr{B} \in \mathscr{A}$.

Das Mengensystem $\mathscr{A}$ heißt die *Borel-σ-Algebra* auf $\mathbb{R}$. Es lässt zeigen, dass die Inklusionen der Approximationen in (+) stets echt sind. Wir müssen also wirklich ω_1-viele Schritte machen, um zu $\mathscr{A}$ zu gelangen. Die Approximationen Σ_α und Π_α bilden die *Borel-Hierarchie*.

Wie im ersten Beispiel haben wir gegenüber der Schnittdefinition Vorteile:

(1) Ein besseres Verständnis von $\mathscr{A}$.

(2) Ein Maß für die Komplexität einer Menge in $\mathscr{A}$: Die Stelle, an der die Menge zum ersten Mal in einer Approximation erscheint (Konstruktionsindex).

(3) Die Möglichkeit, Aussagen über $\mathscr{A}$ durch Induktion (der Länge ω_1) zu zeigen, und Rekursionen entlang der Borel-Hierarchie zu führen.

Wir diskutieren ein Beispiel für (3) etwas ausführlicher.

Borel-Determiniertheit und projektive Mengen

Ein wichtiges Beispiel für eine Hierarchie-Induktion ist der Beweis der Borel-Determiniertheit [Martin, 1975]. Für ein gegebenes $A \subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir das unendlich lange „Spiel“ G_A für zwei Spieler I und II:

(1) Spieler I spielt zu Beginn eine ganze Zahl z.

(2) Danach spielen I und II abwechselnd Nachkommastellen

$\alpha_n \in \{ 0, \dots, 9 \}$ für alle $n \in \omega$ (I spielt alle a_{2n}, II spielt alle a_{2n+1})

Spieler I gewinnt die Partie, falls die gemeinsam gespielte reelle Dezimalzahl

$z, \alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_{2n}\, \alpha_{2n+1} \dots$

ein Element der vorgegebenen Menge A ist. Sonst gewinnt Spieler II. Der erste Spieler versucht also, in die Menge A hinein zu spielen, der zweite versucht, aus A zu entkommen. Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ heißt *determiniert*, falls eine Gewinnstrategie für I oder II im Spiel G_A existiert. Der intuitive Begriff „Gewinnstrategie“ lässt sich dabei leicht mit Hilfe von Funktionen präzisieren, die vorgeben, welche Züge bei welchem Spielstand zu spielen sind. Führt eine derartige Funktion immer zum Gewinn (egal, wie der Gegner spielt), so liegt eine Gewinnstrategie vor.

In ZFC gibt es Mengen reeller Zahlen, die nicht determiniert sind. Zum Beweis wird substantielle das Auswahlaxiom verwendet. Es stellt sich daher die Frage, ob wenigstens alle „einfachen, definierbaren“ Mengen determiniert sind. Hier gilt nun:

Satz *(Borel-Determiniertheit)*

Jedes Element der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ ist determiniert.

Es lässt sich noch relativ leicht zeigen, dass jede offene Menge determiniert ist [Gale / Stewart 1953] (siehe die Ergänzungen am Ende des Essays für einen Beweis). Der Beweis für die Borel-σ-Algebra von Donald Martin verläuft ausgehend von diesem Induktionsanfang mittels eines nichttrivialen Induktionsschritts durch die Borel-Hierarchie. Dabei werden ungewöhnlich komplexe Mengen verwendet, deren Existenz durch wiederholte Anwendung des Ersetzungsschemas von ZFC garantiert wird. Es ist kein nichtinduktiver Beweis bekannt.

Warum ist Determiniertheit mehr als eine Spielerei? Eine kurze Antwort ist:

Determiniertheit impliziert viele gute Regularitätseigenschaften.

Für interessante Teilsysteme $\mathcal{A}$ von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt zum Beispiel: Sind alle Elemente von $\mathcal{A}$ determiniert, so sind alle Elemente von $\mathcal{A}$ auch Lebesgue-messbar; und sie sind abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$, d.h. es gilt (CH) eingeschränkt auf $\mathcal{A}$.

Große Kardinalzahlen

Jede Borel-Menge ist also determiniert. Andererseits gibt es nicht determinierte Teilmengen der reellen Zahlen. Offen bleibt immer noch:

Frage

Welche Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind determiniert?

Eines der besten neueren Ergebnisse der Mengenlehre lautet vereinfacht: Es gibt eine Erweiterung der Basisaxiome ZFC um sogenannte große Kardinalzahlaxiome, mit deren Hilfe – und nicht ohne diese – man beweisen kann, dass jede *projektive Menge* determiniert, und also insbesondere Lebesgue-messbar ist. Das System der projektiven Mengen $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ entsteht wieder durch einen Abschluss-Prozess: Wir schließen die Borel-σ-Algebra $\mathscr{A}$ auf $\mathbb{R}$ ab unter Bildern von stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Komplementbildung. Ist also $A \in \mathscr{P}$ und f stetig, so ist $f[A] \in \mathscr{P}$ und $\mathbb{R} - A \in \mathscr{P}$. Dieser Abschluss-Prozess hat Länge ω und liefert die sogenannte *projektive Hierarchie*. Ist es nicht überraschend, dass die Lebesgue-Messbarkeit der Elemente einer so natürlichen Klasse nur mit starken neuen Axiomen gezeigt werden kann?

Die Lebesgue-Messbarkeit der projektiven Mengen ist schon recht erdnah. Und sobald es ein derartiges Resultat mit einer direkt greifbaren Implikation gibt, etwa „große Kardinalzahlen implizieren, dass jede gerade Zahl größer als zwei die Summe zweier Primzahlen ist“, werden Sie so häufig über Mengenlehre lesen wie in den 60er Jahren, als Paul Cohen das Forcing erfand.

Neue zahlentheoretische Sätze

Warum darf man überhaupt hoffen, dass eine einfache zahlentheoretische Aussage wie die Goldbachsche Vermutung mit (und nur mit) großen Kardinalzahlaxiomen bewiesen werden kann? Weil man weiß, dass durch diese Axiome tatsächlich neue zahlentheoretische Aussagen von der logischen Komplexität (Anzahl der Quantorenwechsel) der Goldbachchen Vermutung beweisbar werden. Es handelt sich hier um sogenannte Π_1-Aussagen über die natürlichen Zahlen: Ein oder mehrere Allquantoren, gefolgt von einer Aussage, in der alle Quantoren beschränkt sind. Von dieser Form ist die Goldbachsche Vermutung:

$$\forall x\, (x > 2 \land x \text{ gerade } \to \exists p, q < x\, (p, q \text{ sind prim} \land p + q = x))$$

(Die Formeln „x gerade“, „p ist prim“ usw. lassen sich mit beschränkten Quantoren schreiben, welche nur noch $+$, $\cdot$, 0, 1 enthalten.)

Bisher gibt es jedoch noch keine neue Π_1-Konsequenz der großen Kardinalzahlaxiome mit einem unmittelbar greifbaren zahlentheoretischen Gehalt. Ein Resultat von der Qualität der *projektiven Determiniertheit* steht noch aus.

Hier ist nicht der Ort, die großen Kardinalzahlaxiome im Detail vorzustellen (wir geben ein Beispiel in den Ergänzungen). Denken Sie an Aussagen der Form „ω existiert“ oder „ω_1 existiert“, die die Länge der Perlenkette der Ordinalzahlen betreffen. Viele solche Aussagen sind aus den Basisaxiomen beweisbar. Für andere brauchen wir neue Axiome. Dass es derartige Prinzipien überhaupt gibt, kann einen in Erstaunen versetzen. Ihre Existenz ist vergleichbar mit der Existenz ferner Galaxien. Es müsste sie nicht geben. Sie sind eine Entdeckung der Fernrohre und zeigen uns den Reichtum des Universums.

Konsistenzstärke

ω_1 habe ich Ihnen vorgestellt als Grenze des Abzählbaren und als Kandidaten für die Größe von $\mathbb{R}$. Und mit der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ haben wir ein Stück der Mathematik beobachtet, in dem ω_1 die Bühne betritt und eine Hierarchie liefert, mit der man tiefe Sätze beweisen kann.

Das unscheinbare ω_1 steht darüber hinaus in erstaunlichem Kontakt mit den fernen Galaxien der großen Kardinalzahlaxiome. Stanisław Ulam hat 1930 gezeigt:

Satz *(Satz von Ulam)*

Es existiert kein nichttriviales σ-additives Maß auf ω_1.

Wir geben in den Ergänzungen einen Beweis. Als Korollar erhalten wir ein Ergebnis von Banach und Kuratowski (1929):

Satz *(Satz von Banach-Kuratowski)*

Die Kontinuumshypothese (CH) und die Existenz eines nichttrivialen σ-additiven Maßes auf den reellen Zahlen sind unverträglich.

Abschwächungen der Forderung nach einem σ-additiven Maß auf ω_1 führen nun zu Aussagen mit bemerkenswerten Konsequenzen. Diese Abschwächungen sind von der Form:

„Es gibt ein σ-additives Maß auf einer σ-Algebra auf ω_1, welche fast die ganze Potenzmenge von ω_1 ist.“

„Es gibt ein fast-σ-additives Maß auf ω_1.“

Derartige Abschwächungen reihen sich ein in eine Vielzahl von *kombinatorischen Prinzipien* über ω_1, welche wie (CH) unabhängig von den Basisaxiomen ZFC sind. In vielen Fällen gibt es aber einen wesentlichen Unterschied:

Ist Φ ein solches Prinzip, so genügt ZFC, um zu zeigen, dass Φ nicht beweisbar ist. Anders als bei (CH) müssen wir aber nun, um zu zeigen, dass Φ konsistent, also nicht widerlegbar ist, große Kardinalzahlaxiome bemühen – und die Zusatzannahme, dass diese Prinzipien keine Widersprüche erzeugen.

Grob vereinfacht ist die Situation die folgende. Es hat sich eine Liste von zusätzlichen Axiomen oder Semi-Axiomen – nennen wir sie A, B, C, … – herauskristallisiert, die den Reichtum des mengentheoretischen Universums beschreiben. Diese großen Kardinalzahlaxiome haben nichts mehr von „unmittelbar einleuchtend" an sich, dürfen aber aus vielerlei Gründen als die kanonische Erweiterung der Basisaxiome gelten.

Ein Grund für ihre ausgezeichnete Stellung – neben ihren Antworten auf Fragen der Determiniertheit (und in Zukunft vielleicht auf Fragen der Zahlentheorie) – ist die verblüffende empirische Tatsache, dass für kombinatorische Aussagen Φ immer genau ein großes Kardinalzahlaxiom, sagen wir K, existiert, das exakt die logische Stärke von Φ besitzt. Gleiche logische Stärke bedeutet: Aus der Widerspruchsfreiheit der Theorie „Basisaxiome + K" folgt die Widerspruchsfreiheit der Theorie „Basisaxiome + Φ" und umgekehrt. Und diese Äquivalenz ist falsch, wenn wir statt K das Axiom J oder L einsetzen. Man nennt das Axiom K auch die *Konsistenzstärke* der Aussage Φ.

Die Bestimmung der Konsistenzstärke einer Aussage verwendet in der Regel zwei verschiedene Techniken, nämlich „innere Modelle" (Kernmodelle) und „iteriertes Forcing". Die Beweise sind komplex und oft sind nur Abschätzungen bekannt. Beide Techniken wurden in den beiden letzten Jahrzehnten intensiv weiterentwickelt.

Den inneren Modellen – natürlichen mengentheoretischen Welten für bestimmte Axiome – kommt zudem die Rolle zu, die Widerspruchsfreiheit der großen Kardinalzahlaxiome relativ zu den Basisaxiomen zu untermauern. Ein strenger Beweis selbst dieser relativen Widerspruchsfreiheit ist nach den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen nicht möglich. Die Konstruktion eines kanonischen inneren Modells für große Kardinalzahlen ist der beste Ersatz für den notwendig fehlenden Beweis ihrer relativen Konsistenz.

Für einige besonders starke große Kardinalzahlaxiome konnte ein inneres Modell noch nicht konstruiert werden, und die Frage etwa der Existenz eines solchen Modells für das sehr starke Axiom „es existiert eine superkompakte Kardinalzahl" hat inoffiziellen Millenniumsrang unter Mathematikern, die sich für Grundlagenfragen interessieren (vgl. [Steel, 2000]).

Das Phänomen der Konsistenzstärke zeigt, dass bereits Fragen über das verhältnismäßig kleine Objekt ω_1 zwangsläufig zu den großen Kardinalzahlaxiomen führen. Ein bestimmtes natürliches Prinzip Φ, das die Existenz eines Maßes auf einer großen σ-Algebra auf ω_1 fordert („es existiert ein ω_1-dichtes Ideal", vgl. die Ergänzungen), hat die Konsistenzstärke W = „es existieren unendlich viele Woodin-Kardinalzahlen". Das Axiom W ist zentral Axiom im Umfeld der Determiniertheit: Es impliziert direkt die Determiniertheit der projektiven Mengen und ist die exakte Konsistenzstärke der Determiniertheit *aller* Teilmengen von $\mathbb{R}$ Basistheorie ZF (Hugh Woodin, 90er Jahre). Dies ist ein Beispiel einer überraschenden Vernetzung verschiedener Teildisziplinen der Mengenlehre – Determiniertheit, Kombinatorik, große Kardinalzahlen –, „*one that speaks of the great achievements that have been made and the promise of deeper insights to come*" (Akihiro Kanamori).

Warum Mengenlehre?

Die Mengenlehre ist nun seit über hundert Jahren die erste Adresse der mathematischen Grundlagenforschung, mit großen Erfolgen gerade in der jüngsten Zeit. Einige Rauchzeichen davon finden Sie oben. Wäre der Hilbertsche Sprachjargon heute noch üblich, könnte man sagen, dass sie zum Ruhm des menschlichen Verstandes nach wie vor wesentlich beiträgt (zeitgemäßer klingt „wissenschaftliche Kultur"). Der Mathematik hat sie ihre moderne Sprache und ihre Klarheit gegeben. Und im hier und jetzt, wo die Mathematik die interdisziplinäre Kommunikationsfähigkeit zu verlieren beginnt, kann der Mengenlehre neben ihrer Hauptaufgabe der Grundlagenforschung für die Zukunft eine weitere, bislang nur zu Beginn ihrer Geschichte wahrgenommene Rolle zukommen, nämlich auch der Mitteilung von Mathematik ein sprachliches Vorbild zu sein. In einem ist sie nämlich unter den mathematischen Disziplinen der Physik am ähnlichsten: Neben den Entdeckungen ist auch eine Interpretation der Entdeckungen zu leisten. Und diese Interpretation ist jedem wissenschaftlich interessierten Hörer zugänglich, wenn sie entsprechend formuliert und präsentiert wird.

Anhang

Dieser Anhang enthält die im Haupttext angesprochenen Ergänzungen:

Ergänzungen

(1) Beweis der Determiniertheit offener und abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$

(2) Beispiel für ein großes Kardinalzahlaxiom: Unerreichbare Kardinalzahlen

(3) Beweis des Satzes von Ulam: „Es gibt kein nichttriviales σ-additives Maß auf ω_1."

(4) Beispiel für ein kombinatorisches Prinzip: „Es existiert ein ω_1-dichtes Ideal auf ω_1."

1. Determiniertheit der offenen Mengen

Wir beweisen (halbformal) den Satz von Gale und Stewart aus dem Jahr 1953:

Satz *(Offene Determiniertheit, Satz von Gale-Stewart)*

Jede offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist determiniert.

Beweis

Annahme, I hat keine Gewinnstrategie. Wir definieren rekursiv eine Strategie τ für Spieler II wie folgt:

Ist $z, \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{2n}$ gespielt worden, so ist der nächste Zug α_{2n+1} von Spieler II gemäß τ wie folgt definiert:

> „ein $\alpha \in \{ 0, 1, \dots, 9 \}$ mit der Eigenschaft: Spieler I hat immer noch keine Gewinnstrategie nach dem Zug α, d.h. I hat keine Gewinnstrategie im Spiel G_A, wenn die ersten Züge $z, \alpha_0 \dots \alpha_{2n} \alpha$ vorgegeben sind“

Durch eine Induktion nach n ist leicht einzusehen, dass ein solches α existiert. Wir dürfen zur Definition von τ an der Stelle n verwenden:

„I hat keine Gewinnstrategie in G_A bei vorgegebenen ersten Zügen $z, \alpha_0 \dots \alpha_{2n}$.“

Wir zeigen nun – und hier erst geht die Offenheit von A ein:

(+) τ ist eine Gewinnstrategie für Spieler II

Sei $x = z, \alpha_0 \alpha_1 \dots$ eine Partie, in der Spieler II nach der Strategie τ spielt (und Spieler I beliebig). *Annahme* $x \in A$. Da A offen ist, existiert ein n mit $z, \alpha_0 \dots \alpha_{2n} \beta_0 \beta_1 \dots \in A$ für beliebige $\beta_0, \beta_1, \dots \in \{ 0, \dots, 9 \}$. Dann ist aber das Spiel G_A mit vorgegebenen ersten Zügen $z, \alpha_0 \dots \alpha_{2n}$ gewonnen für I (bei beliebigem Spiel), im *Widerspruch* zur Definition von τ. Also ist $x \notin A$, und damit τ eine Gewinnstrategie für II.

Kurz formuliert lautet die Strategie für II: „Spiele stets so, dass Spieler I immer noch nicht gewinnt.“ Die Strategie, keine „groben Schnitzer“ zu machen, führt bei offenen Mengen für Spieler II zum Sieg, – vorausgesetzt, das Spiel ist nicht von Anfang an gewonnen für Spieler I.

Mit vertauschten Rollen von I und II können wir in gleicher Weise zeigen:

Satz *(abgeschlossene Determiniertheit)*

Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist determiniert.

2. Ein großes Kardinalzahlaxiom: Unerreichbarkeit

Eine Ordinalzahl α heißt eine *Kardinalzahl*, falls für alle $\beta < \alpha$ gilt: $|\beta| < |\alpha|$. Alle natürlichen Zahlen sind Kardinalzahlen. Die ersten unendlichen Kardinalzahlen sind ω und ω_1. Die unendlichen Kardinalzahlen zerfallen nun in die singulären und die regulären Kardinalzahlen:

Definition *(singulär, regulär)*

Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt *singulär*, falls eine Folge $\langle \alpha_\beta \mid \beta < \lambda \rangle$ von Ordinalzahlen existiert mit:

(i) $\lambda < \kappa$

(ii) $\alpha_\beta < \kappa$ für alle $\beta < \lambda$

(iii) $\sup \{ \alpha_\beta \mid \beta < \lambda \} = \kappa$

Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt *regulär*, falls sie nicht singulär ist.

Intuition

Reguläre Kardinalzahlen κ können von unten nur durch κ-viele Schritte erreicht werden, singuläre Kardinalzahlen κ durch weniger als κ-viele Schritte. Singuläre Kardinalzahlen können sehr groß sein, aber wir können sie vergleichsweise schnell durchlaufen.

Beispiele

Die Kardinalzahlen

$$\omega,\ \omega_1,\ \omega_2 \;=\; \min \{ \alpha > \omega_1 \mid \alpha \text{ Kardinalzahl} \},\ \omega_3,\ \ldots,\ \ldots$$

sind jeweils regulär. Das Paradebeispiel für eine singuläre Kardinalzahl ist

$$\omega_\omega \;=\; \sup \{ \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots \}$$

Die Kardinalzahl ω_ω überragt alle ihre Vorgänger ω_n an Mächtigkeit, aber diese Vorgänger bilden eine Leiter der Länge ω, die zu ω_ω hinauf führt.

Mit Hilfe der Regularität können wir ein großen Kardinalzahlaxiom formulieren:

Definition *(unerreichbare Kardinalzahl)*

Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt *(stark) unerreichbar*, falls gilt:

(i) κ ist regulär.

(ii) Für alle $\alpha < \kappa$ ist $|\mathcal{P}(\alpha)| < \kappa$.

Offenbar ist ω eine unerreichbare Kardinalzahl. Aufgrund der zweiten Bedingung ist eine unerreichbare Kardinalzahl stets eine Limeskardinalzahl. Folgende

Überlegung vermittelt einen Eindruck von der Größe solcher Zahlen: Ist $\kappa = \omega_\alpha$ mit $\alpha > 0$ unerreichbar, so gilt $\alpha = \kappa$, d.h. κ ist die κ-te Kardinalzahl. Denn κ ist das Supremum aller ω_β, $\beta < \alpha$. Da κ regulär ist, gilt $\alpha = \kappa$.

Das einfachste große Kardinalzahlaxiom lautet nun:

Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen (U)

Es existiert eine überabzählbare unerreichbare Kardinalzahl.

In ZFC können wir (U), d.h. die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl κ größer als ω, nicht beweisen.

Beweisskizze

Annahme, ZFC beweist (U). Sei dann κ die kleinste überabzählbare unerreichbare Kardinalzahl. Dann ist die κ-te von Neumann Stufe V_κ ein Mengen-Modell von ZFC + $\neg$ (U). Damit gibt es also ein Modell von ZFC, in dem keine überabzählbare unerreichbare Kardinalzahl existiert. Dies steht *im Widerspruch* zu „ZFC beweist (U)“. In jedem Modell von ZFC gelten alle in ZFC beweisbaren Sätze.

Mit Hilfe des zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes folgt stärker: In ZFC kann man nicht zeigen, dass ZFC + (U) relativ konsistent zu ZFC ist. Die Hinzunahme von ZFC erhöht, wenn man so will, die Gefahr, einen Widerspruch mit aufzunehmen. Dies ist zum Beispiel für das Auswahlaxiom anders: Gödel hat gezeigt, dass die Widerspruchsfreiheit von ZF die Widerspruchsfreiheit von ZFC impliziert. So umstritten das Auswahlaxiom auch sein mag, für Widersprüche ist es nicht verantwortlich. Kann „0 = 1“ in ZFC bewiesen werden, so gibt es einen Beweis von „0 = 1“, der das Auswahlaxiom nicht verwendet. Für Axiome wie (U) (und alle anderen großen Kardinalzahlaxiome) ist dies anders. Jedes solche Axiom kann einen neuen Widerspruch mit sich bringen. Mit anderen Worten: Diese Axiome sind prinzipiell möglicherweise inkonsistent.

3. Der Satz von Ulam über Maße auf ω_1

Definition *(Maß)*

Sei M eine Menge. Ein *nichttriviales* σ-*additives Maß* auf M ist eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften:

(i) $\mu(M) = 1$ *(Normiertheit)*

(ii) $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in M$ *(Nichttrivialität)*

(iii) Für alle paarweise disjunkten Mengen $A_0, A_1, \ldots \subseteq M$ gilt:

$\mu(\bigcup_{n \in \omega} A_n) = \sum_{n \in \omega} \mu(A_n)$ *(σ-Additivität)*

Für ein Maß μ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$ für $A \subseteq B$ und $\mu(M - A) = 1 - \mu(A)$. Nach (ii) und (iii) ist weiter $\mu(A) = 0$ für alle abzählbaren $A \subseteq M$.

Wir zeigen nun:

Satz *(Satz von Ulam (1930))*

Es gibt kein nichttriviales σ-additives Maß auf ω_1.

Beweis

Sei $\langle A_{n,\alpha} \mid n \in \omega, \alpha \in \omega_1 \rangle$ eine Ulam-Matrix, d.h. es gilt:

(a) $A_{n,\alpha} \subseteq \omega_1$ für alle $n \in \omega, \alpha \in \omega_1$

(b) $\bigcup_{n \in \omega} A_{n,\alpha} = \omega_1 - \alpha$ für alle $\alpha < \omega_1$

(c) $\langle A_{n,\alpha} \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ ist paarweise disjunkt für alle $n \in \omega$

zur Existenz einer Ulam-Matrix:

Für alle $\beta < \omega_1$ sei $f_\beta : \omega \to (\beta + 1)$ surjektiv. Mit Hilfe dieser Surjektionen definieren wir für alle für $n \in \omega$ und $\alpha < \omega_1$:

$$A_{n,\alpha} = \{ \beta < \omega_1 \mid f_\beta(n) = \alpha \}$$

Dann ist $\langle A_{n,\alpha} \mid n \in \omega, \alpha \in \omega_1 \rangle$ eine Ulam-Matrix.

Annahme, es gibt ein nichttriviales σ-additives Maß μ auf ω_1. Dann existiert wegen (b) für alle $\alpha < \omega_1$ ein $n_\alpha \in \omega$ mit $\mu(A_{n,\alpha}) > 0$. Also existiert ein $n^* \in \omega$ mit:

$$\mu(A_{n^*,\alpha}) \neq 0 \quad \text{für überabzählbar viele } \alpha < \omega_1$$

(Denn eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.)

Dies ist ein *Widerspruch* zu (c), denn es kann nicht überabzählbar viele paarweise disjunkte Mengen mit positivem Maß geben (andernfalls existiert ein $m \in \omega$ und unendlich viele Mengen A mit $\mu(A) \geq 1/m$, im Widerspruch zur Additivität von μ und $\mu(\omega_1) = 1$).

Dieses Ergebnis verstärkt:

Korollar *(Satz von Banach-Kuratowski (1929))*

Es gelte (CH). Dann existiert kein nichttriviales σ-vollständiges Maß auf $\mathbb{R}$.

Beweis

Aufgrund von (CH) gibt es eine Bijekktion $g : \mathbb{R} \to \omega_1$. *Annahme*, es gibt ein nichttriviales σ-additives Maß μ auf $\mathbb{R}$. Dann ist $g(\mu)$ ein nichttriviales σ-vollständiges Maß auf ω_1, wobei $g(\mu)$ definiert ist durch

$$g(\mu)(A) = \mu(\{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in A \}) \quad \text{für alle } A \subseteq \omega_1.$$

Dies ist ein *Widerspruch* zum Satz von Ulam.

4. Kombinatorik auf ω_1: Existenz eines ω_1-dichten Ideals

Definition *(Ideal auf ω_1)*

Ein Mengensystem $I \subseteq \mathcal{P}(\omega_1)$ heißt ein *Ideal* auf ω_1, falls gilt:

(i) Für alle $\alpha \in \omega_1$ ist $\{ \alpha \} \in I$.

(ii) Für alle $A, B \subseteq \omega_1$ gilt: $A \in I$ und $B \subseteq A$ *impliziert* $B \in I$.

(iii) Für alle $\{ A_n \mid n \in \omega \} \subseteq I$ ist $\bigcup_{n \in \omega} A_n \in I$.

Dualer Filter und Maße

Ist I ein Ideal auf ω_1, so heißt

$F(I) = \{ A \subseteq \omega_1 \mid \omega_1 - A \in I \}$

der *duale Filter*. Das System $\mathcal{A} = I \cup F(I)$ ist eine σ-Algebra und die Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit

$\mu(A) = 1$, falls $A \in F(I)$, $\mu(A) = 0$, falls $A \in I$

ist ein nichttriviales σ-addivives Maß auf $\mathcal{A}$.

Ist I ein Ideal auf ω_1 so setzen wir für $A, B \subseteq \omega_1$:

$A \subseteq_I B$, *falls* $B - A \in I$.

Anschauung ist, dass A „im Wesentlichen“ eine Teilmenge von B ist (bis auf eine kleine Differenzmenge bzgl. I).

Definition *(ω_1-dichtes Ideal)*

Ein Ideal I ω_1 heißt ω_1*-dicht*, falls ein $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\omega_1) - I$ existiert mit:

(i) $|\mathcal{D}| = \omega_1$

(ii) Für alle $X \subseteq \mathcal{P}(\omega_1) - I$ existiert ein $Y \in \mathcal{D}$ mit $Y \subseteq_I X$.

Die zweite Eigenschaft bedeutet: Das Ideal $\mathcal{D}$ ist „dicht nach unten” in der partiellen Ordnung $\subseteq_I$.

Das System $\mathcal{P}(\omega_1) - I$ ist dicht nach unten, erfüllt aber (i) nicht: $\mathcal{D}$ darf lediglich die Mächtigkeit ω_1 haben. Man kann zeigen, dass ein abzählbares $\mathcal{D}$ für (ii) nicht genügt. Die Mächtigkeit $|\mathcal{D}| = \omega_1$ ist kleinstmöglich.

Wir betrachten nun die folgende kombinatorische Aussage:

Existenz eines ω_1-dichten Ideals (DI)

Es existiert ein ω_1 dichtes Ideal auf ω_1.

Im Sinne obiger Bemerkung ist dieses Prinzip eine Version von:

„Es existiert ein σ-additives Maß μ auf einer großen σ-Algebra auf ω_1.“

Denn $\mathscr{A} = \mathrm{I} \cup \mathrm{F(I)}$ ist „groß“: Die nicht μ-messbaren Mengen sind genau die Elemente von $\mathcal{P}(\omega_1) - \mathscr{A}$; und innerhalb dieser nicht μ-messbaren Mengen ist $\mathscr{D}$ dicht nach unten und von der Größe ω_1.

Das Resultat „der Zusammenschau verschiedener Dinge“ von Hugh Woodin lautet nun:

Satz *(Satz von Woodin)*

Die folgenden Theorien sind äquikonsistent:

(i) ZFC + „Es existieren ω-viele Woodin-Kardinalzahlen.“

(ii) ZFC + (DI)

(iii) ZF + (AD)

Dabei ist

(AD) = Axiom of Determinacy = „Jedes $A \subseteq \mathbb{R}$ ist determiniert.“

Dieses Axiom ist nicht mit dem Auswahlaxiom verträglich, sodass in (iii) die Theorie ZF um (AD) erweitert wird.

Zwei Theorien T_1 und T_2 sind *äquikonsistent*, wenn aus der Widerspruchsfreiheit der Theorie T_1 die Widerspruchsfreiheit von T_2 folgt und umgekehrt. Die Konsistenzargumente sind dabei konstruktiv: Würde es jemandem gelingen, in ZF (ohne Auswahlaxiom) zu zeigen, dass es eine nicht determinierte Teilmenge von $\mathbb{R}$ gibt, so ließe sich dieser Beweis in einen Widerspruch innerhalb der Theorien (i) bzw. (ii) des Satzes übersetzen.

Literatur

Zwei allgemeinverständliche Artikel über moderne Mengenlehre sind [Jensen 1992] und [Woodin 1994]. Zur Diskussion um neue Axiome siehe [Steel 2000]. Zur Determiniertheit siehe [Martin 1975] und [Martin/Steel 1989].

Jensen, Ronald 1992 *Innere Modelle und große Kardinalzahlen* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Jubiläumstagung 100 Jahre DMV (Bremen, 1990). B.G. Teuber, Stuttgart, 265 – 281.

Woodin, Hugh 1994 *Large Cardinal Axioms and Independence: The Continuum Problem Revisited* The Mathematical Intelligencer Vol. 16/3. Springer, New York, 31 – 5.

Steel, John 2000 *Mathematics Needs New Axioms* Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 6/4, 422 – 433.

Martin, Donald 1975 *Borel Determinacy* Ann. Math. 102, 363 – 371.

Martin, Donald / Steel, John 1989 *A proof of Projective Determinacy* J. Amer. Math. Soc. 2, 71 – 125.

Jech, Thomas 1978 *Set Theory* Academic Press, New York.

Kanamori, Akihiro 1994 *The Higher Infinite* Perspectives in Mathematical Logic. Springer, Berlin.

Kechris, Alexander 1995 *Classical Descriptive Set Theory* Graduate Texts in Mathematics Vol. 156, Springer, New York.

Kunen, Kenneth 1980 *Set Theory – An Introduction to Independence Proofs* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics Vol. 102, North-Holland, Amsterdam.

Woodin, Hugh 1999 *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms and the Nonstationary Ideal* de Gruyter, Berlin, New York.

3. Ordinalzahlen in der Analysis und Maßtheorie

Wir stellen verschiedene Anwendungen der Ordinalzahlen in der Analysis und Maßtheorie vor. Im Zentrum stehen die abzählbaren transfiniten Zahlen, die wir mit einer auf Friedrich Hartogs zurückgehenden Methode einführen. Die wichtigste Anwendung ist ein neuer Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes der Maßtheorie.

1. Einführung

Im Umfeld von Eindeutigkeitsfragen der Theorie der Fourier-Reihen schuf Georg Cantor den Begriff der „linearen Punktmannigfaltigkeit", der „Teilmenge von $\mathbb{R}$". Er untersuchte die Operation der Punktableitung, die von einer Menge P reeller Zahlen zur Menge P′ ihrer Häufungspunkte führt, und um dieser Operation Herr zu werden, entwickelte er die Ordinalzahlen.

Die neue transfinite Mengenlehre wurde im deutschen Sprachraum schnell populär, die Wirkung der sechsteiligen Artikelfolge „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten" ist schwer zu überschätzen. Die durch Mittag-Leffler angeregten französischen Übersetzungen dieser Arbeiten in den Acta Mathematica brachten weiter denjenigen Zweig der mathematischen Moderne hervor, der heute mit den Namen Borel, Baire und Lebesgue verbunden ist. Um 1920 herum hatten die transfiniten Methoden international den Stand des mathematischen Grundwissens erreicht, sie tauchen in den Glanzstücken der Lehrbuchliteratur ebenso auf wie in den wichtigsten Forschungsartikeln der Zeit. Wir nennen hier nur Hausdorffs „Grundzüge der Mengenlehre" von 1914 und Stefan Banachs Abhandlung über bewegungsinvariante Inhalte von 1923; letztere enthält einen Beweis einer Version des Satzes von Hahn-Banach durch transfinite Induktion.

Warum dann die mathematische Popularität der transfiniten Zahlen abriss, wäre Gegenstand einer eigenen Abhandlung. Zwei Gründe kann man sicher anführen:

Zum einen ging die mathematische Grundlagenforschung nach Gödel ihre eigenen Wege. Die Mengenlehre wurde, abgesehen von der Sprache, die sie der ganzen Mathematik zur Verfügung stellte, Teil der mathematischen Logik. Lediglich die deskriptive Mengenlehre, vorangetrieben vor allem durch Hausdorff und die russische Schule um Lusin, konnte zunächst noch den Kontakt zur Analysis und Maßtheorie halten, der der Mengenlehre ja in die Wiege gelegt zu sein schien. Nach anfänglichen Erfolgen stieß man aber auch hier, wie im Fall der Kontinuumshypothese, auf „zu schwierige Fragen" – Fragen, von denen man heute weiß, dass sie in der klassischen Mathematik keine Antwort haben, etwa die Frage, ob alle projektiven Mengen Lebesgue-messbar sind oder nicht. Die Analyse der Problematik blieb Spezialisten innerhalb der Logik vorbehalten. Die Analysis und Maßtheorie umschifften die Probleme der Grundstruktur $\mathbb{R}$ so weit wie möglich.

Zum anderen gelang es oftmals, traditionelle transfinite Argumente durch Anwendung eines Maximalprinzips zu eliminieren, am bekanntesten ist hier das Zornsche Lemma. Der Aufwand, sich die Begriffsbildungen der transfiniten Zahlen anzueignen und sie zu lehren, schien entbehrlich.

Wir wollen hier einige illustrierende und allgemein interessante Beispiele für die Einsatzmöglichkeiten der transfiniten Zahlen geben. Sie sollen auch die These unterstützen, dass die Ansiedlung des Transfiniten außerhalb des mathematischen Grundwissens einen Verlust darstellt.

Notation

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthalten die Null. Wir verwenden konsequent „$\subseteq$" für die Inklusion und „$\subset$" für die echte Inklusion von Mengen, in Analogie zu „$\leq$" und „$<$" für partielle Ordnungen. Eine Funktion wird als eine (rechtseindeutige) Menge von geordneten Paaren aufgefasst, und somit bedeutet $f \subseteq g$ für Funktionen f und g einfach, dass g eine Fortsetzung von f ist. Für eine Funktion f bezeichnen wir den Definitionsbereich mit dom(f) und den Wertebereich mit rng(f). Es gilt also

$$\mathrm{dom}(f) = \{ x \mid \text{es gibt ein } y \text{ mit } (x, y) \in f \}$$

$$\mathrm{rng}(f) = \{ f(x) \mid x \in \mathrm{dom}(f) \}$$

Wir schreiben $f : A \to B$, falls f eine Funktion mit $\mathrm{dom}(f) = A$ und $\mathrm{rng}(f) \subseteq B$ ist.

Wir argumentieren in der üblichen Mathematik. Es geht in diesem Artikel nicht darum, auf Feinheiten der mengentheoretischen Axiomatik einzugehen, etwa auf die Rolle des Auswahlaxioms. Für Leser mit Interesse an solchen Fragen geben wir am Ende des dritten Abschnitts aber einen knappen Überblick, wo starke Axiome der Mengenlehre in der Theorie der Ordinalzahlen wesentlich verwendet werden.

2. Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Die Theorie des Transfiniten beruht auf dem von Cantor eingeführten Begriff der Wohlordnung, der die induktive Ordnungsstruktur der natürlichen Zahlen verallgemeinert: Eine lineare Ordnung $\langle W, < \rangle$ heißt eine *Wohlordnung*, falls jedes nichtleere $A \subseteq W$ ein $<$-kleinstes Element besitzt. Die Relation $<$ heißt dann *eine Wohlordnung auf* oder *von* W. Wir schreiben oft kurz W statt $\langle W, < \rangle$. Für $X \subseteq W$ und $y \in W$ bedeutet $X \leq y$, dass $x \leq y$ für alle $x \in X$ gilt.

In Wohlordnungen kann es keinen „unendlichen Abstieg" geben: Jede Folge

$$x_0 \geq x_1 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots \quad x_n \in W$$

ist schließlich konstant. Denn sonst hätte $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ kein kleinstes Element.

Ist $W \neq \emptyset$, so sei 0_W das kleinste Element von W, das wir auch das *Anfangselement* von W nennen. Ist $x \in W$ und gibt es ein y mit $x < y$, so sei $x+1$ der *Nachfolger* von x, d.h. es sei

$x + 1$ = „das kleinste $y \in W$ mit $x < y$".

Ist $X \subseteq W$ und gibt es ein y mit $X \leq y$, so sei sup(X) das *Supremum* von X, d.h.

sup(X) = „das kleinste $y \in W$ mit $X \leq y$".

Ein $x \in W$ heißt ein *Limeselement*, falls $x \neq 0_W$ und $x = \sup(\{ y \in W \mid y < x \})$. Ein $x \in W$ heißt ein *Nachfolgerelement*, falls es ein $y \in W$ gibt mit $x = y + 1$. Jedes $x \in W - \{ 0_W \}$ ist ein Limeselement oder ein Nachfolgerelement. Für jedes $x \in W$ heißt $W_x = \{ y \in W \mid y < x \}$ das durch x gegebene *Anfangsstück* von W.

Zwei Wohlordnungen W_1 und W_2 heißen *gleichlang*, in Zeichen $W_1 \equiv W_2$, falls es einen Ordnungsisomorphismus $f : W_1 \to W_2$ gibt. W_1 heißt *kürzer* als W_2, in Zeichen $W_1 \prec W_2$, falls es ein $x \in W_2$ gibt mit $W_1 \equiv (W_2)_x$.

Wir stellen (hier ohne Beweis) zusammen:

Satz *(Hauptsätze über Wohlordnungen)*

(a) Eine Wohlordnung ist niemals gleichlang zu einem ihrer Anfangsstücke: Es existiert kein $x \in W$ mit $W \equiv W_x$.

(b) Die Identität ist der einzige Ordnungsautomorphismus auf W.

(c) Für je zwei Wohlordnungen W_1, W_2 gilt genau einer der drei Fälle:

$W_1 \prec W_2$, $W_1 \equiv W_2$, $W_2 \prec W_1$ *(Vergleichbarkeitssatz von Cantor)*

(d) Ist $\mathcal{W} \neq \emptyset$ eine Menge von Wohlordnungen, so gibt es ein $W^* \in \mathcal{W}$ mit:

Für alle $W \in \mathcal{W}$ gilt: $W^* \prec W$ *oder* $W^* \equiv W$.

(e) Jede Menge M lässt sich wohlordnen. *(Wohlordnungssatz von Zermelo)*

(f) Sei M eine Menge. Dann gibt es eine Wohlordnung $<$ von M mit:

Für alle $x \in M$ ist $|M_x| < |M|$.

Die zentrale Eigenschaft (c) kann elementar und ohne Verwendung von transfiniter Induktion und Rekursion bewiesen werden. Der originale Beweis von Cantor aus dem Jahre 1897 geht bereits diesen Weg. (Siehe etwa [Deiser 2004, 2.3 f.] für einen Beweis dieser und der anderen Aussagen.)

Eine gedankliche, und später dann mathematisch zu vollziehende Abstraktion führt von den Wohlordnungen zu den Ordinalzahlen: Die Ordinalzahlen sind intuitiv die Ordnungstypen der Wohlordnungen, ihre Längen. Cantor hat diese Intuition zeit seines Lebens für die Untersuchung und Entwicklung des Ordinalzahlbegriffs genügt, erst die Nachfolge-Generation hat dann mathematisch rigorose Umsetzungen benötigt und gefunden.

Wir geben einige Beispiele für den intuitiven Zugang. Zunächst erhalten die natürlichen Zahlen den Ordnungstyp ω zugewiesen. Cantor hat, einer uralten mathematischen und philosophischen Tradition folgend, unter ω ein Gebilde aus Einheiten verstanden, das aus $\mathbb{N}$ hervorgeht, wenn wir von der Natur der Elemente von $\mathbb{N}$ abstrahieren, aber ihre Ordnung beibehalten. Wir können aber ω auch einfach als Zahlzeichen auffassen. Zur Konstruktion längerer Wohlordnungen ordnen wir nun die Elemente von $\mathbb{N}$ oder einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ neu an:

Beispiele für Wohlordnungen aus natürlichen Zahlen

(1) Wir können etwa die geraden Zahlen aufzählen, und dann als letztes zusätzliches Element die 1 anfügen. Formal ordnen wir also die Menge

$$A = \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ 1 \}$$

durch die Vorschrift: $a \le b$, falls a, b gerade sind und a in der üblichen Ordnung kleinergleich b ist, oder aber $b = 1$ gilt. Wir erhalten eine Wohlordnung, deren Ordnungstyp wir mit $\omega + 1$ bezeichnen.

(2) Lassen wir alle geraden Zahlen auf die geraden Zahlen folgen, so erhalten wir den Typus oder die Zahl $\omega + \omega$.

(3) Sieben wir $\mathbb{N}$ nach der Methode von Eratosthenes aus, so erhalten wir ω-viele aufeinanderfolgende Reihen der Länge ω; diesen Ordnungstyp nennen wir ω^2. Den Ordnungstyp ω^2 erhalten wir ebenfalls, wenn wir eine $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-Matrix in der üblichen Weise diagonal mit natürlichen Zahlen füllen und anschließend die ω-vielen Zeilen hintereinander anordnen. Ähnlich ergeben sich die Ordnungstypen ω^n für $n \ge 3$.

(4) Der kleinste Ordnungstyp größer als alle ω^n wird mit ω^ω bezeichnet. Um wenigstens für diesen schon relativ komplexen Ordnungstyp noch eine Anordnung konkret anzugeben, können wir wie folgt vorgehen: Wir schreiben die natürlichen Zahlen größer gleich 2 in ihrer Primfaktorzerlegung, wobei wir Vielfachheiten ausschreiben und die Faktoren wie üblich der Größe nach ordnen, also etwa $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Wir ordnen die so dargestellten Zahlen wie folgt: Hat a weniger Faktoren als b, so kommt a in unserer Anordnung vor b. Haben a und b dieselbe Anzahl an Faktoren, so entscheidet die Größe des ersten unterschiedlichen Faktors. Dann ist etwa $3 < 2 \cdot 2$, $2 \cdot 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Diese Anordnung von $\mathbb{N}$ beginnt mit allen Primzahlen, gefolgt von der Reihe 4, 6, 10, … Der Leser, der sich etwas auf diese Ordnung einlässt, wird sehen, dass sie den Ordnungstyp ω^ω besitzt. Für jedes $n \geq 1$ haben die Zahlen, die vor 2^{n+1} in unserer Anordnung erscheinen, den Ordnungstyp ω^n.

(5) Auch nach ω^ω geht es noch weiter, ein langer Weg führt zu ω^α mit $\alpha = \omega^\omega$. Türme von ω-Potenzen führen zu einer Zahl, die man ε_0 nennt, und die in der logischen Untersuchung der Peano-Arithmetik eine fundamentale Rolle spielt. Auch hier ist aber noch kein Ende abzusehen. Zu jeder gefundenen transfiniten Zahl α können wir immer $\alpha + 1$ bilden, indem wir zum Beispiel das Anfangselement einer α repräsentierenden Wohlordnung herauslösen und als neues letztes Element wieder hinzufügen.

Wie kann man dieses frei von Willkür verlaufende, aber scheinbar endlose Weiterzählen formal fassen? Die arithmetische Notation hat, so interessant ihre Details sind, ihre Grenzen. Das allgemeine Ziel wäre eine rigorose Definition von „Ordnungstyp einer Wohlordnung“ (= „Ordinalzahl“), das bescheidenere Ziel eine rigorose Definition von „Ordnungstyp einer abzählbaren Wohlordnung“ (= „abzählbare Ordinalzahl“). Wir wollen hier in erster Linie das bescheidenere Ziel weiter verfolgen.

Der Wohlordnungssatz garantiert die Existenz langer Wohlordnungen, etwa solcher von $\mathbb{R}$. Eine Möglichkeit, die abzählbaren Ordinalzahlen formal einzuführen, ist also diese: Wir fixieren irgendeine überabzählbare Wohlordnung $\langle W, < \rangle$, für die alle Anfangsstücke W_x abzählbar sind. Eine solche Wohlordnung existiert nach dem Wohlordnungssatz für ein $W \subseteq \mathbb{R}$: Ist nämlich $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ eine Wohlordnung, so ist diese Wohlordnung entweder bereits wie gewünscht, und wir können $W = \mathbb{R}$ setzen, oder aber es existiert ein kleinstes $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{R}_x = \{ y \in \mathbb{R} \mid y < x \}$$

überabzählbar ist. Dann ist $W = \mathbb{R}_x$ wie gewünscht. Die abzählbaren Ordinalzahlen definieren wir nun einfach als die Elemente von W, und W selbst nennen wir die erste überabzählbare Ordninalzahl, die wir mit ω_1 bezeichnen.

Diese Art der Einführung ist allerdings sehr grob und beleuchtet die Natur der transfiniten Zahlen nicht besonders gut. Wir sind an direkten, natürlichen Konstruktionsmethoden für lange Wohlordnungen interessiert. Solche Methoden haben Friedrich Hartogs 1915 und John von Neumann 1923 gefunden (und unabhängig von John von Neumann auch Ernst Zermelo). Mit dem sehr eleganten von Neumannschen Ansatz werden heute die Ordinalzahlen in der Mengenlehre eingeführt, und damit wird auch das allgemeine oben ausgesprochene Ziel erreicht: α heißt eine *von Neumannsche Ordinalzahl*, falls α transitiv ist und durch die $\in$-Relation wohlgeordnet wird. (Dabei heißt eine Menge x *transitiv*, falls für alle $y \in x$ gilt, dass $y \subseteq x$.) Die so präsentierte Definition ist ad hoc und erst nach längerer Exegese zu würdigen.

Für die hier verfolgten Zwecke erscheint die Methode von Hartogs besser geeignet, weil sie die abzählbaren Ordinalzahlen der Intuition entgegenkommend definiert. Sie ist für sich interessant und spielt auch in der axiomatischen Mengenlehre eine wichtige Rolle. Sie greift unmittelbar die Idee der Neuanordnung der natürlichen Zahlen auf und ist in diesem Sinne der nächste natürliche mathematische Schritt, der auf eine intuitive Beschreibung der Ordinalzahlen folgt.

Wir erreichen das bescheidenere Ziel durch folgende Definition:

Definition *(abzählbare Ordinalzahlen und ω_1 nach der „Hartogsmethode")*

Sei $\mathcal{H} = \{ \langle N, < \rangle \mid \langle N, < \rangle$ ist eine Wohlordnung, $N \subseteq \mathbb{N} \}$. Mit der Äquivalenzrelation $\equiv$ = „gleichlang" setzen wir

$$\omega_1 = \mathcal{H}/\equiv$$

Jedes $\alpha \in \omega_1$ heißt eine *abzählbare Ordinalzahl*. Ein $\alpha \in \omega_1$ heißt zudem eine *transfinite Zahl*, falls für jedes $\langle N, < \rangle \in \alpha$ gilt, dass N unendlich ist. ω_1 selbst heißt *die erste überabzählbare Ordinalzahl*.

Definition *(die natürliche Ordnung auf ω_1)*

Für $\alpha, \beta \in \omega_1$ setzen wir $\alpha < \beta$, falls jedes Element von α kürzer als jedes Element von β ist. Für $\alpha \in \omega_1$ sei weiter

$$W(\alpha) = (\omega_1)_\alpha = \{ \beta \in \omega_1 \mid \beta < \alpha \}.$$

Wir schreiben auch $\alpha < \omega_1$ für $\alpha \in \omega_1$.

Die abzählbaren Ordinalzahlen sind also von der Form $\alpha = \langle N, < \rangle/\equiv$, wobei $\langle N, < \rangle$ eine Wohlordnung einer Menge N von natürlichen Zahlen ist. Der Cantorsche Abstraktionsakt wird durch eine Äquivalenzklassenbildung ersetzt.

Der folgende weder triviale noch besonders schwierig zu beweisende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften von ω_1 zusammen (siehe etwa [Deiser 2004, 2.5] oder [Deiser 2007, Intermezzo nach 2.3] für vollständige Beweise):

Satz *(Hauptsatz über $\omega_1 = \mathcal{H}/\equiv$)*

(a) $\langle \omega_1, < \rangle$ ist eine Wohlordnung.

(b) Für alle $\alpha \in \omega_1$ und $N \in \alpha$ gilt $W(\alpha) \equiv N$.

Insbesondere ist $W(\alpha)$ abzählbar für alle $\alpha \in \omega_1$.

(c) ω_1 ist überabzählbar.

(d) Für jede überabzählbare Wohlordnung W ist $\omega_1 \equiv W$ oder $\omega_1 \prec W$.

(e) Für jede überabzählbare Menge M ist $|\omega_1| \leq |M|$.

(f) Für jedes abzählbare $A \subseteq \omega_1$ ist $\sup(A) < \omega_1$.

(g) Für jedes Limeselement $\lambda < \omega_1$ gibt es eine Folge $\langle \alpha_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ mit:

$\alpha_n < \alpha_{n+1} < \omega_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$.

Um einzusehen, dass ω_1 überabzählbar ist, argumentieren wir so: *Wäre* ω_1 abzählbar, so wäre die Wohlordnung $\langle \omega_1, < \rangle$ gleichlang zu einer gewissen Wohlordnung $\langle \mathbb{N}, <^* \rangle$ der natürlichen Zahlen, denn eine Bijektion $f : \omega_1 \to \mathbb{N}$ überträgt die Wohlordnung von ω_1 nach $\mathbb{N}$. Dann ist aber

$$\langle \mathbb{N}, <^* \rangle / \equiv \; \in \omega_1$$

nach Definition von ω_1. Der erwünschte *Widerspruch* ergibt sich nun durch den Nachweis, dass $\langle \omega_1, < \rangle$ gleichlang zu dem durch $\langle \mathbb{N}, <^* \rangle / \equiv$ gegebenen Anfangsstück von sich selbst ist, was für keine Wohlordnung gelten kann.

Definition *(Nachfolgerordinalzahlen und Limesordinalzahlen)*

Die Nachfolgerelemente der Wohlordnung $\langle \omega_1, < \rangle$ heißen *Nachfolgerordinalzahlen*, die Limeselemente heißen *Limesordinalzahlen* oder *Limiten*.

Wir definieren weiter:

Definition *(ω)*

ω = „die kleinste Limesordinalzahl" = $\langle \mathbb{N}, < \rangle / \equiv$.

Wir können ω mit $\mathbb{N}$ und die Ordinalzahlen kleiner als ω mit den natürlichen Zahlen identifizieren, indem wir Äquivalenzklassen mit natürlichen Repräsentanten verwechseln.

Wir haben die oben entwickelte Intuition in eine mathematische Definition umgesetzt: Die abzählbar unendlichen Ordinalzahlen sind alle Zahlen (im Sinne von „Typen", „Längen von Wohlordnungen", oder formal im Sinne von Äquivalenzklassen gleichlanger Wohlordnungen), die man erhält, wenn man die natürlichen Zahlen anders anordnet, aber ihre Wohlordnungseigenschaft beibehält. ω_1 als die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen lässt sich selbst in natürlicher Weise wohlordnen und ist dann eine kürzeste überabzählbare Wohlordnung.

Die Ordinalzahlreihe bis einschließlich ω_1 verläuft schematisch etwa so:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega + \omega, \omega + \omega + 1, \ldots, \alpha, \alpha + 1, \ldots, \ldots, \ldots, \omega_1$$

Diese Reihe bezeichnet einen sehr weiten Weg. Der Weg hat eine überabzählbare Länge und stärker gilt obige Eigenschaft (vi), die wir noch einmal explizit so formulieren: Für jede abzählbare Folge

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots$$

von Ordinalzahlen gibt es ein β mit

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots < \beta < \omega_1$$

Die erste überabzählbare Ordinalzahl kann nicht in abzählbar vielen Schritten von unten erreicht werden.

3. Induktion und Rekursion

Wie für $\mathbb{N}$ können wir entlang einer beliebigen Wohlordnung induktive Beweise und rekursive Definitionen durchführen.

Beweis durch (starke) Induktion für Wohlordnungen

Sei W eine Wohlordnung, und sei $A \subseteq W$. Für alle $x \in W$ gelte:

Ist $W_x \subseteq A$, so ist auch $x \in A$.

Dann ist $A = W$.

Der Beweis ist trivial: *Andernfalls* existiert ein kleinstes $x \in W - A$. Dann ist $W_x \subseteq A$. Nach Voraussetzung also $x \in A$, *Widerspruch.*

Wollen wir zeigen, dass alle $x \in W$ eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ erfüllen, so können wir also so vorgehen: Wir zeigen, dass $\mathcal{E}$ für ein beliebiges x gilt und dürfen dabei verwenden, dass alle $y < x$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$ erfüllen.

Ohne Beweis notieren wir:

Rekursionssatz für Wohlordnungen

Sei W eine Wohlordnung, und sei F eine überall definierte Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion G auf W mit:

Für alle $x \in W$ ist $G(x) = F(G \mid W_x)$.

Eine „überall definierte Funktion" ist eine „sprachliche Zuordnung", die jedem Objekt ein anderes zuordnet, etwa: x geht über in $\{ x \}$, oder: x geht über in $\bigcup x$. Solche Zuordnungen sind „echte Klassen". Eine Präzisierung ist in der mathematischen Logik möglich. Der Leser vergleiche dies mit der Aussonderung $\{ x \in y \mid x \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{E} \}$; auch hier ist prinzipiell eine Präzisierung des Eigenschaftsbegriffs nötig, aber für ein intuitives Verständnis entbehrlich.

Wir definieren also G(x), indem wir auf den Verlauf der bisherigen Definition zurückgreifen, d.h. G(y) liegt vor für alle $y < x$. Wie wir G(x) berechnen, wird gerade durch die Funktion F beschrieben.

Die Induktion und Rekursion nutzt in vielen Fällen die eigentümliche Unterscheidung in Nachfolger und Limiten. Häufig verwendete Formen der Induktion und Rekursion für ω_1 sind:

Dreiteilige Induktion entlang der abzählbaren Ordinalzahlen

Sei $A \subseteq \omega_1$, und es gelte:

(i) $0 \in A$. *(Induktionsanfang)*

(ii) Für alle $\alpha < \omega_1$ gilt: Ist $\alpha \in A$, so ist auch $\alpha + 1 \in A$. *(Induktionsschritt)*

(iii) Für alle Limiten λ gilt: Ist $W(\lambda) \subseteq A$, so ist auch $\lambda \in A$. *(Limesschritt)*

Dann gilt $A = \omega_1$.

Dreiteilige Rekursion entlang der abzählbaren Ordinalzahlen

Eine Funktion G mit Definitionsbereich ω_1 kann eindeutig definiert werden durch die Definition von:

(i) $G(0)$

(ii) $G(\alpha + 1)$, mit Rückgriff auf $G(\alpha)$ für alle $\alpha < \omega_1$

(iii) $G(\lambda)$, mit Rückgriff auf $G \mid W(\lambda)$ für alle Limiten $\lambda < \omega_1$

In vielen Fällen ist zudem der Limesschritt von der Form

$$G(\lambda) = \bigcup_{\alpha < \lambda} G(\alpha) \quad \text{oder} \quad G(\lambda) = \bigcap_{\alpha < \lambda} G(\alpha).$$

Analoge dreiteilige Formen gelten für Induktionen und Rekursionen entlang beliebiger Wohlordnungen.

Wir gehen nun noch kurz auf axiomatische Details ein. Grundsätzlich gilt: Die meisten Sätze über Wohlordnungen/Ordinalzahlen lassen sich ganz ohne Auswahlaxiom beweisen, während viele Sätze über Mächtigkeiten das Auswahlaxiom benötigen. Die wesentliche Ausnahme im Bereich der Wohlordnungen ist der Wohlordnungssatz von Zermelo, der de facto wie das Zornsche Lemma äquivalent zum Auswahlaxiom ist.

Gelegentlich braucht man in der Theorie der Wohlordnungen aber auch schwache Formen des Auswahlaxioms wie etwa: „Eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist abzählbar.“ (Um den üblichen Beweis durch Diagonalaufzählung überhaupt durchführen zu können, muss zunächst abzählbar oft eine Aufzählung *gewählt* werden; liegt die unendliche Matrix bereits vor oder kann sie in definierbarer Weise angegeben werden, ist kein Auswahlaxiom nötig.) Diese schwache Form des Auswahlaxioms wird zum Beispiel im Beweis von Eigenschaft (e) des Hauptsatzes über ω_1 benutzt.

Die Hartogsmethode lässt sich verallgemeinern und führt in der Mengenlehre ohne Verwendung des Auswahlaxioms zu folgendem Satz: Zu jeder Menge M gibt es eine Wohlordnung W derart, dass keine Injektion von W nach M existiert. Entscheidend wird natürlich das Potenzmengenaxiom verwendet. Unsere Konstruktion entspricht dem Spezialfall $M = \mathbb{N}$ und führt zu $W = \omega_1$ via $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Die allgemeine Einführung der Ordinalzahlen nach von Neumann braucht ebenfalls das Auswahlaxiom nicht. Für den Satz: „Für jede Wohlordnung W existiert eine von Neumannsche Ordinalzahl α mit $W \equiv \alpha$“ wird entscheidend das Ersetzungsschema gebraucht, das in der urspünglichen Axiomatik von Zermelo noch nicht enthalten ist. Das Ersetzungsschema ist weiter auch wesentlich für den Beweis des Rekursionssatzes.

Die von Neumann Ordinalzahlen bilden eine echte Klasse, es gibt ihrer zu viele, als dass sie eine Menge bilden könnten: Andernfalls wären sie durch die Epsilon-Relation wohlgeordnet, und wir könnten wieder weiterzählen und „+ 1“ bilden. Diese „Paradoxie aller Ordinalzahlen“ war Cantor bereits einige Jahre vor der Entdeckung der Russell-Paradoxie bekannt, er hat sie aber leider nicht veröffentlicht.

Wir betrachten nun eine Reihe von Anwendungen.

4. Einige elementare Sätze der Analysis

Aus der Sicht von ω_1 sind vor allem folgende Konsequenzen der Separabilität von $\mathbb{R}$ von Gewicht:

(S1) Es gibt keine strikt aufsteigende Folge $\langle x_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ in $\mathbb{R}$.

(S2) Es gibt keine $\subset$-aufsteigende (oder $\subset$-absteigende) Folge $\langle U_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Analoges gilt für $\subset$-aufsteigende oder $\subset$-absteigende Folgen von abgeschlossene Mengen.

Zum Beweis von (S1) bemerken wir: Ist $x_\alpha < x_{\alpha+1}$, so liegt zwischen x_α und $x_{\alpha+1}$ eine von abzählbar vielen rationalen Zahlen. Die wesentliche Beobachtung zum Beweis von (S2) ist: Ist $U_\alpha \subset U_{\alpha+1}$, so gibt es ein B_n mit $B_n \subseteq U_{\alpha+1}$ und non($B_n \subseteq U_\alpha$), wobei $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ eine fest gewählte Basis der Topologie von $\mathbb{R}$ ist. Damit ist die Folge aller $N_\alpha = \{ n \mid B_n \subseteq U_\alpha \}$ eine strikt aufsteigende Folge von Teilmengen von $\mathbb{N}$ und damit notwendig abzählbar.

Definieren wir also eine strikt aufsteigende Folge reeller Zahlen durch transfinite Rekursion entlang ω_1, so muss diese Rekursion nach abzählbar vielen Schritten abbrechen. Als erste Anwendung dieser Eigenschaft beweisen wir den Zwischenwertsatz. Es geht uns dabei in erster Linie um die Illustration der Methode. Das Argument ist zudem, hat man sich an seinen Typus erst einmal gewöhnt, sehr anschaulich, und entspricht der naiven Idee, eine Nullstelle durch Lesen der Funktion von „links nach rechts" zu suchen.

Satz *(Zwischenwertsatz)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Dann gibt es ein $c \in \,]a, b[$ mit $f(c) = 0$.

Beweis

Wir definieren durch transfinite Rekursion entlang ω_1 solange möglich:

$$x_0 = a$$

$$x_{\alpha+1} = \text{„ein } y \text{ mit } x_\alpha < y < b \text{ und } f(y) > 0\text{"}$$

$$x_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} x_\alpha \quad \text{für Limiten } \lambda$$

(„solange möglich" heißt hier: solange ein y wie im Nachfolgerschritt gefordert existiert; ähnlich auch im folgenden).

Die Folge der konstruierten Zahlen ist strikt aufsteigend nach Konstruktion (für den Limesschritt gilt $x_\alpha < x_{\alpha+1} \leq x_\lambda$, also $x_\alpha < x_\lambda$ für alle $\alpha < \lambda$). Nach (S1) bricht die Rekursion also nach abzählbar vielen Schritten ab. Wegen der Stetigkeit von f ist $x_{\alpha+1}$ immer definiert, wenn $f(x_\alpha) > 0$ ist. Also ist das letzte definierte Glied ein x_λ, λ Limes, und es gilt $f(x_\lambda) \leq 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f und $x_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} x_\alpha$ ist dann aber $f(x_\lambda) = 0$.

Die Definition mittels „ein …“ im Nachfolgerschritt meint nicht, dass der Beweis substantiell einen Auswahlakt verwendet, sondern soll vielmehr die allgemeine Eigenschaft herausstellen, für die das Argument gültig bleibt: Es genügt irgendeine „Dynamik“, die ein geeignetes größeres Element erzeugt. Eine konkrete Wahl wäre zum Beispiel $x_{\alpha+1} = x_\alpha + 1/n$, wobei $n \geq 1$ minimal ist für die Eigenschaft $f(x_\alpha + 1/n) > 0$. Für diese Dynamik wird die Nullstelle in ω-vielen Schritten gefunden, wie ein kleines zusätzliches Argument zeigt. Dies tut der allgemeinen transfiniten Idee der Nullstellensuche keinen Abbruch. Liegt zum Beispiel eine Aufzählung $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ aller rationalen Zahlen vor, so ist $x_{\alpha+1} = x_\alpha + q_n$ eine natürliche Dynamik, wobei n minimal mit $f(x_\alpha + q_n) > 0$. Hier werden im Allgemeinen mehr als ω-viele Schritte benötigt, um eine Nullstelle zu finden.

Wählt man y im Nachfolgerschritt so, dass $f(z) > 0$ für alle $x_\alpha \leq z \leq y$ gilt (und nicht nur $f(y) > 0$), so findet die Rekursion in im Allgemeinen transfinit vielen Schritten die kleinste Nullstelle von f.

Ähnlich können wir mit transfiniter Rekursion Extremwerte ermitteln:

Satz *(stetige Funktionen nehmen ihr Maximum an)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = \max(\mathrm{rng}(f))$.

Beweis

Wir definieren durch Rekursion entlang ω_1 solange möglich:

$$x_0 = a$$

$$x_{\alpha+1} = \text{„ein } x > x_\alpha \text{ mit } f(x) = \max(\{ f(y) \mid a \leq y \leq x \})\text{“}$$

$$x_\lambda = \sup_{\alpha < \lambda} x_\alpha \quad \text{für Limiten } \lambda$$

Aufgrund der Abgeschlossenheit des Definitionsbereichs ist $x_\lambda \in \mathrm{dom}(f)$, und wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f(x_\lambda) = \max(\{ f(y) \mid a \leq y \leq x_\lambda \})$$

weiterhin im Limesschritt. Diese Eigenschaft gilt damit also für alle definierten x_α.

Ist x_α kein x^* wie gewünscht, so existiert $x_{\alpha+1}$: Sei dann nämlich $y > x_\alpha$ beliebig mit $f(y) > f(x_\alpha)$. Dann ist

$$x_{\alpha+1} = \inf(\{ z > x_\alpha \mid f(z) \geq f(y) \})$$

geeignet (wegen der Stetigkeit von f). Die Folge der x_α ist strikt aufsteigend. Also gibt es ein letztes definiertes x_α nach (S1), und x_α ist ein x^* wie gewünscht.

Weiter können wir die Kompaktheit abgeschlossener beschränkter Intervalle durch ein transfinites Argument zeigen:

Satz *(Kompaktheit abgeschlossener beschränkter Intervalle)*

Jedes $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt.

Beweis

Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $[a, b]$ durch offene Intervalle. Wir definieren rekursiv $x_\alpha \in [a, b]$ und $U_\alpha \in \mathcal{U}$ mit $x_\alpha \in U_\alpha$ wie folgt:

Rekursionsschritt α

Sei $x_\alpha = \sup(\bigcup \{ U_\beta \mid \beta < \alpha \})$. Für $\alpha = 0$ sei dabei $x_0 = a$.

Ist $x_\alpha > b$, so stoppen wir die Rekursion. Andernfalls sei

U_α = „ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x_\alpha \in U$“.

Die Rekursion stoppt bei einem $\alpha_0 < \omega_1$, da die x_α strikt aufsteigend sind. Wir definieren eine absteigende und also endliche Folge von Ordinalzahlen $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_n \geq 0$ durch:

α_{i+1} = „das kleinste $\alpha < \alpha_i$ mit $\inf(U_{\alpha_i}) \in U_\alpha$“, *falls* $\inf(U_{\alpha_i}) \geq a$

Ein solches α existiert: Nach Konstruktion ist $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$. Weiter ist für alle γ die Menge $\bigcup_{\beta < \gamma} U_\beta$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, das $[0, x_\gamma[$ umfasst (wie eine Induktion zeigt).

Nach Konstruktion ist $[a, b] \subseteq \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_{\alpha_i}$.

5. Perfekte Mengen

Die historisch erste Anwendung der Ordinalzahlen ist die von Cantor eingeführte sog. *iterierte Ableitung*. Wir erinnern vorab an den Begriff der perfekten Menge: Ein $P \subseteq \mathbb{R}$ heißt *perfekt*, falls P abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte besitzt, d.h. für alle $x \in P$ und alle offenen Umgebungen U von x ist die Menge $P \cap U$ unendlich.

Sei nun $P \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Wir definieren rekursiv:

$P^{(0)} = P$

$P^{(\alpha+1)} = \{ x \mid x \text{ ist ein Häufungspunkt von } P^{(\alpha)} \}$ für alle $\alpha < \omega_1$

$P^{(\lambda)} = \bigcap \{ P^{(\alpha)} \mid \alpha < \lambda \}$ für Limiten $\lambda < \omega_1$

Beispiel

Das Intervall ist $[0, 1]$ perfekt, im Gegensatz zur Menge

$A = \{ 1/2^n \mid n \in \mathbb{N}) \cup \{ 0 \}$.

Jeder Punkt von A mit Ausnahme der 0 ist isoliert. Es gilt

$A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = \{ 0 \}$, $A^{(\alpha)} = \emptyset$ für alle $\alpha \geq 2$

Die Folge $\langle P^{(\alpha)} \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ ist eine $\subseteq$-absteigende Folge abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$. Ist $P^{(\beta)} = P^{(\beta+1)}$ für ein β, so ist $P^{(\alpha)} = P^{(\beta)}$ für alle $\alpha \geq \beta$. Ein solches β existiert nach (S2), die Folge ist zunächst strikt absteigend bzgl. der Inklusion und dann schließlich konstant. Wir nennen $P^{(\beta)}$ den *perfekten Kern* von P. Wir beobachten, dass die Differenzmenge

$$P^{(\alpha+1)} - P^{(\alpha)} = \{ x \in P^{(\alpha)} \mid x \text{ ist ein isolierter Punkt von } P^{(\alpha)} \}$$

für jedes $\alpha < \omega_1$ abzählbar ist. Insgesamt erhalten wir also für jede abgeschlossene Menge $P \subseteq \mathbb{R}$ die *Cantor-Bendixson-Zerlegung*

$$P = P^* \cup A \text{ mit}$$

(1) $P^* = P^{(\beta)}$ perfekt

(2) $A = \bigcup_{\alpha < \beta} (P^{(\alpha+1)} - P^{(\alpha)})$ abzählbar

Man kann zeigen, dass eine Zerlegung einer abgeschlossenen Menge in eine perfekte Menge und einen abzählbaren Rest eindeutig ist, weshalb der bestimmte Artikel für die Cantor-Bendixson-Zerlegung angemessen ist.

In eine nichtleere perfekte Menge kann man die Cantor-Menge C einbetten, und C hat die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Zusammen mit der Cantor-Bendixson-Zerlegung erhalten wir so die Lösung des Kontinuumsproblems für die abgeschlossenen Mengen: Ist $P \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist P abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Auch für dieses Urbeispiel konnte man die transfinite Rekursion schließlich eliminieren. Denn es zeigte sich:

$$P^* = \{ x \in P \mid P \cap\,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\text{ ist überabzählbar für alle } \varepsilon > 0 \}$$

Der perfekte Kern kann also in einem einzigen Schritt erzeugt werden. Die durch das iterierte Abstreifen isolierter Punkte gewonnene Feinanalyse der Menge P geht dabei allerdings verloren, weshalb der transfinite Beweis seinen „Platz in der Punktmengentheorie behauptet, aus historischen und sachlichen Gründen“ ([Hausdorff 1914, S. 275]). Wir erhalten ein Maß für die Komplexität einer abgeschlossenen Menge, nämlich das kleinste β mit $P^* = P^{(\beta)}$. Diese Situation ist typisch für den Einsatz der Ordinalzahlen: Sie sind oftmals geeignet, die Elemente von Mengensystemen ihrer Komplexität nach anzuordnen. Danach können sie Schritt für Schritt untersucht werden, und es können z. B. Funktionen Schritt für Schritt auf den Komplexitätsschichten des Systems definiert werden. Wir werden unten zur Konstruktion von Maßen in einer derartigen Weise vorgehen. (Für Beispiele in der Theorie der Banach-Räume siehe etwa [Odell 2004].)

Es ist ein schönes historisches Detail (und passend zum Thema dieses Artikels) dass Cantor die transfiniten Zahlen für eine topologisch-analytische Anwendung entwickelt und zur Reife gebracht hat.

6. Partielle Ordnungen

Mit transfiniter Rekursion können wir partielle Ordnungen durchforsten und insbesondere das Zornsche Lemma sehr natürlich beweisen:

Beweis des Zornschen Lemmas

Sei $\langle P, <_P \rangle$ eine nichtleere partielle Ordnung mit der üblichen „Kettenbedingung“:

(+) Ist $Q \subseteq P$ linear geordnet durch $<_P$, so existiert ein $p \in P$ mit $Q \leq p$.

Sei $W = \langle \mathcal{P}(P), <_W \rangle$ eine Wohlordnung von $\mathcal{P}(P)$. Wir definieren solange möglich durch Rekursion entlang $x \in W$:

p_x = „ein $p \in P$ mit der Eigenschaft: $\{ p_y \mid y <_W x \} <_P p$“

Es gibt ein kleinstes $x^* \in W$, für das p_x nicht definiert ist, denn andernfalls wäre die Zuordnung „$f(x) = p_x$“ injektiv von W nach P. Nach Voraussetzung (+) ist dieses x^* kein Limeselement von W. Sei also $x^* = y^* + 1$ in W. Dann ist p_{y^*} ein maximales Element von P nach Konstruktion.

Der Beweis lässt sich in einem Satz so zusammenfassen: „Steige in der partiellen Ordnung soweit nach oben, bis du ein maximales Element findest.“ Die Theorie der Wohlordnungen wird verwendet, um im Limesschritt weiterzukommen.

Ist P abzählbar, so können wir das Argument mit der Wohlordnung $W = \omega_1$ führen. Allgemeiner lassen sich Ordinalzahlen (oder die allgemeine Hartogs-Konstruktion) benutzen, wodurch der Rückgriff auf den Wohlordnungssatz entfällt. Aber auch dann wird im Allgemeinen das Auswahlaxiom zur Definition der Folge der p_x herangezogen werden müssen. Das Zornsche Lemma ist ja (auf der Basis der Axiome von Zermelo-Fraenkel) äquivalent zum Auswahlaxiom.

7. Sigma-Ringe und Borel-Mengen

Wir erinnern an einige grundlegende Begriffe über Mengensysteme.

Definition *(Verband, Ring, Algebra)*

Ein Mengensystem $\mathcal{S}$ heißt ein *(Mengen-)Verband*, falls $\emptyset \in \mathcal{S}$ und $\mathcal{S}$ abgeschlossen unter Vereinigungen und Durchschnitten ist.

Ist ein Verband $\mathcal{S}$ abgeschlossen unter Differenzen von Mengen, so nennen wir $\mathcal{S}$ einen Ring. Hat ein Ring ein $\subseteq$-größtes Element X, so heißt er eine *Algebra auf X.*

Ein Ring $\mathcal{R}$ heißt ein σ-*Ring*, falls $\mathcal{R}$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ist. Eine σ-*Algebra* ist eine Algebra, die ein σ-Ring ist.

Für ein Mengensystem $\mathcal{S}$ setzen wir:

ring($\mathcal{S}$) = „der von $\mathcal{S}$ erzeugte Ring“ = $\bigcap \{ \mathcal{R} \mid \mathcal{R}$ ist ein Ring mit $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{S} \}$

$\sigma(\mathcal{S})$ = „der von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Ring“ = $\bigcap \{ \mathcal{R} \mid \mathcal{R}$ ist ein σ-Ring mit $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{S} \}$

Ist $\mathcal{U}$ der Verband der offenen Mengen eines topologischen Raumes X, so heißt $\sigma(\mathcal{U})$ die *Borel-σ-Algebra* auf X. Die Elemente von $\sigma(\mathcal{U})$ heißen die *Borel-Mengen von X.*

Eine der wichtigsten Anwendungen von ω_1 ist eine hierarchische Anordnung der Borel-Mengen eines topologischen Raumes oder allgemeiner eine derartige Anordnung von $\sigma(\mathcal{S})$ für ein beliebiges Mengensystem $\mathcal{S}$.

Für ein Mengensystem $\mathcal{A}$ verwenden wir:

Hausdorff-Notationen

$\mathcal{A}_\sigma = \{ \bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ist abzählbar $\}$

$\mathcal{A}_\delta = \{ \bigcap \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ist abzählbar und nichtleer $\}$

$\mathcal{A}_c = \{ X - P \mid P \in \mathcal{A} \}$

Zur Bildung von $\mathcal{A}_c$ ist der Raum X entweder explizit gegeben oder andernfalls $X = \bigcup \mathcal{A}$.

Sei nun $\mathcal{S}$ ein Mengensystem. Wir definieren durch Rekursion über ω_1:

Ring-Hierarchie eines Mengensystems

$\mathcal{R}_0 = \text{ring}(\mathcal{S})$

$\mathcal{R}_{\alpha+1} = \text{ring}((\mathcal{R}_\alpha)_\sigma)$ für alle $\alpha < \omega_1$

$\mathcal{R}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{R}_\alpha$ für alle Limiten $\lambda < \omega_1$

Satz *(Eigenschaften der Ring-Hierarchie)*

Für alle $\alpha < \beta < \omega_1$ gilt:

(R1) $\mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathcal{R}_\beta$

(R2) $\mathcal{R}_\alpha$ ist ein Ring

(R3) $\sigma(\mathcal{S}) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{R}_\alpha$

Beweis

Die beiden ersten Eigenschaften sind leicht einzusehen. Für (R3) ist zunächst $\mathcal{R}_\alpha \subseteq \sigma(\mathcal{S})$ für alle $\alpha < \omega_1$, wie eine triviale Induktion nach α zeigt. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{R}_\alpha$ ein σ-Ring ist. Das System $\mathcal{A}$ ist als Vereinigung einer Kette von Ringen ein Ring. Ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ abzählbar, so gibt es ein $\alpha < \omega_1$ mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}_\alpha$. Dann ist aber $\bigcup \mathcal{B} \in (\mathcal{R}_\alpha)_\sigma \subseteq \mathcal{R}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{A}$.

Wir bemerken, dass die Definition von $\mathcal{R}_{\alpha+1}$ eigentlich zwei Schritte in einem umfasst: Ausgehend von $\mathcal{R}_\alpha$ bilden wir zunächst den Verband $\mathcal{V}_{\alpha+1} := (\mathcal{R}_\alpha)_\sigma$, und anschließend setzen wir $\mathcal{R}_{\alpha+1} = \mathrm{ring}(\mathcal{V}_{\alpha+1})$. Für jeden Verband $\mathcal{V}$ hat aber $\mathrm{ring}(\mathcal{V})$ die folgende Darstellung, wie recht leicht einzusehen ist:

(#) $\quad \mathrm{ring}(\mathcal{V}) = \{ \Sigma_{i \leq n} A_i - B_i \mid n \in \mathbb{N}, A_i, B_i \in \mathcal{V}, B_i \subseteq A_i \text{ für alle } i \leq n \}$,

wobei wir hier und im folgenden die Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen mit Σ und $+$ statt $\bigcup$ und $\cup$ schreiben. (Eine Formel wie $D = A + B + C$ enthält also implizit, dass $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$.)

Mit dieser Zweiteilung des Nachfolgerschritts liefert die Ring-Hierarchie von $\mathcal{S}$ eine befriedigende rekursive Erzeugung von $\sigma(\mathcal{S})$: Alle Erweiterungsschritte sind einfacher Natur, zusammengenommen ergeben sie das komplexe Gebilde $\sigma(\mathcal{S})$.

Mit nichttrivialen (bereits bei Lebesgue auftauchenden) Diagonalargumenten kann man zeigen, dass für viele Systeme $\mathcal{S}$ – etwa für die Standardtopologie von $\mathbb{R}$ – tatsächlich ω_1-viele Schritte notwendig sind, um $\sigma(\mathcal{S})$ zu erzeugen, d.h. im allgemeinen ist für alle $\alpha < \omega_1$ der Ring $\mathcal{R}_\alpha$ kein σ-Ring.

Wir diskutieren weiter noch die sog. *Borel-Hierarchie* metrischer Räume, die durchweg aus Verbänden aufgebaut ist. Sie ist seit Hausdorff in der deskriptiven Mengenlehre sehr populär und für manche Zwecke besser geeignet ist als obige – wiederum für andere Zwecke angemessene – Ring-Hierarchie. Sei also $\langle X, \mathcal{U} \rangle$ ein metrisierbarer topologischer Raum, und sei $\mathcal{F} = \mathcal{U}_c$ das System der abgeschlossenen Mengen des Raumes. Wir definieren durch Rekursion über $\alpha < \omega_1$:

Borel-Hierarchie

$\Sigma^0_0 = \mathcal{U}, \quad \Pi^0_0 = \mathcal{F}$

$\Sigma^0_{\alpha+1} = (\Pi^0_\alpha)_\sigma, \quad \Pi^0_{\alpha+1} = (\Sigma^0_\alpha)_\delta$ für alle $\alpha < \omega_1$

$\Sigma^0_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \Sigma^0_\alpha, \quad \Pi^0_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \Pi^0_\alpha$ für alle Limiten $\lambda < \omega_1$

Falls nötig schreiben wir genauer $\Sigma^0_\alpha(X)$ und $\Pi^0_\alpha(X)$ statt Σ^0_α und Π^0_α.

Die gewählte Indizierung weicht etwas von der üblichen ab, damit der Vergleich mit der Ring-Hierarchie (den wir unten durchführen) deutlicher wird.

In metrischen Räumen gilt bekanntlich $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_\sigma$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_\delta$, und dies führt induktiv zu schönen Inklusionseigenschaften der Hierarchie. Wir stellen diese und andere Eigenschaften zusammen. Hierzu setzen wir noch

$\Delta^0_\alpha = \Sigma^0_\alpha \cap \Pi^0_\alpha$ für alle $\alpha < \omega_1$

Satz *(Eigenschaften der Borel-Hierarchie)*

Für alle $\alpha < \omega_1$ und alle Limiten $\lambda < \omega_1$ gilt:

(B1) $\Sigma^0_\alpha \cup \Pi^0_\alpha \subseteq \Delta^0_{\alpha+1}$, $\Pi^0_\alpha = (\Sigma^0_\alpha)_c$, $\Delta^0_\alpha = (\Delta^0_\alpha)_c$

Speziell gilt $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}$, $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_{\alpha+1}$, $\Sigma^0_\lambda = \Pi^0_\lambda$.

(B2) Σ^0_α und Π^0_α sind Verbände. Das System Σ^0_α (Π^0_α) ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen (abzählbaren Schnitten).

(B3) $\sigma(\mathcal{U}) = \bigcup_{1 \le \alpha < \omega_1} \Sigma^0_\alpha = \bigcup_{1 \le \alpha < \omega_1} \Pi^0_\alpha$

(B4) Ist $g : X \to Y$ stetig, so gilt:

$\{ g^{-1}(P) \mid P \in \Sigma^0_\alpha(Y) \} \subseteq \Sigma^0_\alpha(X)$

$\{ g^{-1}(P) \mid P \in \Pi^0_\alpha(Y) \} \subseteq \Pi^0_\alpha(X)$

(B5) Ist X überabzählbar und polnisch, so sind alle Inklusionen echt:

$\Sigma^0_\alpha \neq \Pi^0_\alpha$, $\Delta^0_\alpha \subset \Sigma^0_\alpha, \Pi^0_\alpha$, $\Sigma^0_\alpha, \Pi^0_\alpha \subset \Delta^0_{\alpha+1}$

Bis auf die Eigenschaft (B5), die wie erwähnt auf einem Diagonalargument beruht, können alle Behauptungen durch Induktion über α einfach gezeigt werden.

Zusammenhang mit der Ring-Hierarchie

Wegen $\Sigma^0_\alpha \cup \Pi^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}$ und den Abgeschlossenheitseigenschaften von $\Sigma^0_{\alpha+1}$ ist $\mathrm{ring}(\Sigma^0_\alpha) \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}$ für alle $\alpha < \omega_1$ (denn für alle $A, B \in \Sigma^0_\alpha$ gilt $A - B = A \cap B^c \in \Sigma^0_{\alpha+1}$, und weiter sind dann auch endliche Summen solcher Differenzen in $\Sigma^0_{\alpha+1}$). Die Ring-Hierarchie des Systems $\mathcal{U}$ lässt sich damit leicht aus der Borel-Hierarchie gewinnen, denn es gilt

$\mathcal{R}_\alpha = \mathrm{ring}(\Sigma^0_\alpha)$ für alle $\alpha < \omega_1$,

wie man durch Induktion zeigt. Umgekehrt ist

$\Sigma^0_{\alpha+1} = \mathcal{V}_{\alpha+1} = (\mathcal{R}_\alpha)_\sigma$, $\Sigma^0_\lambda = \Pi^0_\lambda = \mathcal{R}_\lambda$

für alle $\alpha < \omega_1$ und alle Limiten $\lambda < \omega_1$. Die Σ-Folge der Borel-Hierarchie besteht also an den Nachfolgerstellen aus den Zwischenstufen der Ring-Hierarchie.

In der Theorie der unendlichen Zweipersonenspiele tauchen Eigenschaften von Borel-Mengen auf, die nur mit Hilfe transfiniter Induktion gezeigt werden können. Die Borel-Hierarchie erlaubt es, eine Aussage für Borel-Mengen gleichmäßig für alle metrisierbaren Räume zu zeigen – gleichmäßig in dem Sinne, dass für den Nachweis einer Eigenschaft einer Borel-Menge $A \in \Sigma^0_\alpha(X)$ auf das Bestehen dieser Eigenschaft für gewisse $B \in \Sigma^0_\beta(Y)$ zurückgegriffen wird, mit $\beta < \alpha$ und einem anderen metrischen Raum Y.

Allgemein ist die Borel-Hierarchie geeignet, um eine Eigenschaft für alle Borel-Mengen nachzuweisen, die nicht notwendig für eine σ-Algebra von Mengen gilt.

Abgesehen von Anwendungen machen die diskutierten Hierarchien eindrucksvoll den Reichtum der Borel-Mengen deutlich, und sie beleuchten darüber hinaus die Stellung des Objekts ω_1.

8. Existenz und Eindeutigkeit von Maßen

Wir geben einen (anscheinend neuen) Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes der Maßtheorie, der das gesuchte Maß rekursiv entlang der Ring-Hierarchie konstruiert. Unser Ziel ist eine kompakte Darstellung, die die Struktur der Argumentation klar herausstellt. Wir beschränken uns deswegen auf endliche (Prä-)Maße auf Algebren als Ausgangspunkt. Die Ring-Hierarchie einer Algebra besteht ausschließlich aus Algebren, und das Rechnen mit Differenzen wird einfacher, da „$\infty - \infty$“ nicht auftaucht. Am Ende des Abschnitts gehen wir auf den allgemeinen Fall ein und diskutieren eine alternative Sicht der Grundlagen der Maßtheorie, die durch unsere Überlegungen nahegelegt wird. Eine ausführliche Darstellung der Theorie findet der Leser in [Deiser 2007b].

An den Zwischenstufen der Ring-Hierarchie tauchen Verbände in der Form $\mathcal{V}_{\alpha+1} = (\mathcal{R}_\alpha)_\sigma$ auf. Wir entwickeln deswegen die folgenden Begriffe der Inhaltstheorie allgemein für Verbände und nicht nur für die spezielleren Ringe. Im folgenden bezeichnet $\mathcal{V}$ immer einen Verband.

Wir schreiben $\bigcup_n A_n$ statt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\sup_n \mu(A_n)$ statt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$, usw. Weiter bedeutet $A_n \uparrow A$, dass $A_0 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ und $A = \bigcup_n A_n$. Analog steht $A_n \downarrow A$ für $\subseteq$-absteigende Folgen mit $\bigcap_n A_n = A$. Wie schon oben schreiben wir + und Σ statt $\cup$ bzw. $\bigcup$ für paarweise disjunkte Mengenvereinigungen.

Eine Funktion $\mu : \mathcal{V} \to [0, \infty[$ heißt:

(i) *additiv*, falls $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{V}$

(ii) σ-*additiv*, falls $\mu(\Sigma_n A_n) = \Sigma_n \mu(A_n)$ für alle $A_n \in \mathcal{V}$ mit $\Sigma_n A_n \in \mathcal{V}$

(iii) *modular*, falls $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{V}$

(iv) $\uparrow$-*stetig*, falls $\mu(A) = \sup_n \mu(A_n)$ für alle $A_n \uparrow A$ in $\mathcal{V}$

(v) $\emptyset$-*stetig*, falls $\inf_n \mu(A_n) = 0$ für alle $A_n \downarrow \emptyset$ in $\mathcal{V}$

(vi) *monoton*, falls $\mu(A) \leq \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{V}$ mit $A \subseteq B$

Wir definieren:

Definition *(Inhalt auf einem Verband)*

Eine Funktion $\mu : \mathscr{V} \to [0, \infty[$ heißt ein (endlicher) *Inhalt* auf einem Verband $\mathscr{V}$, falls gilt: $\mu(\emptyset) = 0$, μ ist monoton, μ ist modular.

Auffällig ist hier die Forderung der Modularität statt der gewohnten Additivität. Ist $\mathscr{V}$ ein Ring, so zeigt man leicht, dass die Additivität äquivalent zur Modularität ist. Damit stimmt obige Inhaltsdefinition für Ringe mit der üblichen überein. Für Verbände ist die Additivität aber im Allgemeinen zu schwach:

Beispiel

Sei $\mathscr{V} = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 0, 1 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 0, 1, 2 \} \}$. Dann ist $\mathscr{V}$ ein Verband. Jede Funktion $\mu : \mathscr{V} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ ist additiv auf $\mathscr{V}$, da sich in diesem Verband gar keine nichttrivialen disjunkten Mengenvereinigungen bilden lassen. Sicherlich wollen wir aber nicht jede monotone Funktion μ auf $\mathscr{V}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ einen Inhalt nennen (denn wir wollen insbesondere, dass sich Inhalte von $\mathscr{V}$ nach ring($\mathscr{V}$) fortsetzen lassen).

Der folgende allgemeine (leider wenig bekannte) Satz von Hausdorff zeigt, dass der modulare Inhaltsbegriff der richtige ist. Der Leser führe sich vorab noch einmal die Darstellung (#) in Abschnitt 7 von ring($\mathscr{V}$) vor Augen.

Satz *(Fortsetzungssatz von $\mathscr{V}$ nach ring($\mathscr{V}$))*

Sei $\mu : \mathscr{V} \to [0, \infty[$ ein Inhalt. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Inhalt auf ring($\mathscr{V}$), den wir ebenfalls mit μ bezeichnen. Dieser Inhalt ist gegeben durch:

$$\mu(\Sigma_{i \leq n}\, A_i - B_i) \;=\; \Sigma_{i \leq n}\, \mu(A_i) - \mu(B_i) \quad \text{für alle } A_i, B_i \in \mathscr{V} \text{ mit } B_i \subseteq A_i.$$

Die Definition von μ mag offensichtlich erscheinen, die Wohldefiniertheit und die Additivität von μ auf ring($\mathscr{V}$) ist jedoch eine nichttriviale Angelegenheit. Für Beweise siehe [Hausdorff 1914, Anhang], [Pettis 1951], [Kisyński 1968], [Lipecki 1971], [Deiser 2007b], wobei die beiden letztgenannten die kürzesten Beweise sind und jeweils auf etwa einer Seite ihr Ziel erreichen. Der elegante Beweis von Lipecki verwendet Funktionenräume, der Beweis des Autors bleibt der Mengenalgebra treu (und ist verwandt mit der Argumentation bei Pettis).

Ein Inhalt μ auf einem Ring heißt ein *(Prä-)Maß*, falls μ σ-additiv ist. Gleichwertig ist, wie man leicht zeigt, die Forderung der $\uparrow$-Stetigkeit.

Eine einfache allgemeine Maßdefinition für Verbände existiert dagegen nicht, obiger Übergang von $\mathscr{V}$ nach ring($\mathscr{V}$) zerstört im Allgemeinen die σ-Additivität und die $\uparrow$-Stetigkeit von μ. In der Ring-Hierarchie tauchen aber nur spezielle Verbände auf, und deswegen können wir hier dieses Problem umgehen. Wir zeigen in zwei Schritten, dass wir ein endliches Maß auf einer Algebra zu einem Maß auf der Algebra ring($\mathscr{A}_\sigma$) fortsetzen können.

Satz *(Supremums-Fortsetzung von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}_\sigma$)*

Sei μ ein Maß auf einer Algebra $\mathcal{A}$. Wir setzen μ nach $\mathcal{V} = \mathcal{A}_\sigma$ fort durch

$$\mu(A) = \sup_n \mu(A_n) \text{ für } A_n \uparrow A \text{ mit } A_n \in \mathcal{A}.$$

Dann ist μ ein wohldefinierter $\uparrow$-stetiger Inhalt auf $\mathcal{V}$ mit der Eigenschaft:

(+) Für alle $A, B \in \mathcal{V}$ mit $B \subseteq A$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C \in \mathcal{V}$ mit $C \supseteq A - B$ und $\mu(C) < \mu(A) - \mu(B) + \varepsilon$.

Beweis

Für die Wohldefiniertheit seien $A_n, B_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow A$, $B_n \uparrow A$. Dann ist $C_{n,m} := A_n \cap B_m \in \mathcal{A}$ für alle n, m. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sup_n \mu(A_n) &= \sup_n \sup_m \mu(C_{n,m}) \\ &= \sup_m \sup_n \mu(C_{n,m}) \\ &= \sup_m \mu(B_m) \end{aligned}$$

Für alle $A_n, B_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow A$ und $B_n \uparrow B$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(\textstyle\bigcup_n A_n \cup B_n) + \mu(\textstyle\bigcup_n A_n \cap B_n) \\ &= \sup_n \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n) \\ &= \sup_n \mu(A_n) + \mu(B_n) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

Also ist μ modular. Ist $A \subseteq B$, so gilt $B'_n \uparrow B$ mit $B'_n = B_n \cup A_n$. Dann ist aber offenbar $\mu(A) \leq \mu(B)$, und damit ist μ ein Inhalt auf $\mathcal{V}$.

Eine Standarddiagonalisierung zeigt die $\uparrow$-Stetigkeit von μ auf $\mathcal{V}$: Seien $A_n \uparrow A$ in $\mathcal{V}$ und $B_{n,m} \uparrow A_n$ mit $B_{n,m} \in \mathcal{A}$ für alle n, m. Ohne Einschränkung ist $B_{n,m} \subseteq B_{n',m}$ für alle m und alle $n \leq n'$. Dann gilt $B_{n,n} \uparrow A$ und somit ist

$$\mu(A) = \sup_n \mu(B_{n,n}) = \sup_n \sup_m \mu(B_{n,m}) = \sup_n \mu(A_n).$$

Zum Beweis von (+) seien $B \subseteq A$ in $\mathcal{V}$. Seien $A_n, B_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow A$, $B_n \uparrow B$. Wir setzen $C_n = A - B_n = \bigcup_k (A_k - B_n) \in \mathcal{V}$. Dann gilt $C_n \downarrow A - B$, und $\mu(C_n) = \mu(A) - \mu(B_n)$ für alle n wegen der $\uparrow$-Stetigkeit von μ. Dann ist aber

$$\inf_n \mu(C_n) = \mu(A) - \sup_n \mu(B_n) = \mu(A) - \mu(B).$$

Weiter zeigen wir:

Satz *(Fortsetzungssatz von $\mathcal{V}$ nach $\mathrm{ring}(\mathcal{V})$, Ergänzung)*

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, und sei μ ein $\uparrow$-stetiger Inhalt auf $\mathcal{V} = \mathcal{A}_\sigma$ mit (+). Dann ist die Hausdorff-Fortsetzung von μ nach $\mathrm{ring}(\mathcal{V})$ ein Maß auf $\mathrm{ring}(\mathcal{V})$.

Beweis

μ ist ein Inhalt auf ring($\mathcal{V}$). Wir zeigen die σ-Additivität von μ. Hierzu genügt es wegen der Darstellung (#) von ring($\mathcal{V}$) zu zeigen:

Für alle $B_n \subseteq A_n$, $B \subseteq A$ in $\mathcal{V}$ mit $\Sigma_n\, A_n - B_n = A - B$ gilt:

$$\mu(A - B) \;=\; \Sigma_n\, \mu(A_n - B_n)$$

Wegen Monotonie und endlicher Additivität von μ auf ring($\mathcal{V}$) gilt „$\geq$“.

Zum Beweis von „$\leq$“ sei $\varepsilon = \Sigma_n\, \varepsilon_n$ mit beliebigen $\varepsilon_n > 0$. Seien $C_n \in \mathcal{V}$ derart, dass $C_n \supseteq A_n - B_n$ und $\mu(C_n) \leq \mu(A_n - B_n) + \varepsilon_n$ für alle n gilt. Ohne Einschränkung gilt $C_n \subseteq A_n \cap A$ für alle n. Dann gilt $(\bigcup_{i \leq n} C_i) \cup B \uparrow A$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mu(A) \;&=\; \sup_n \mu(\textstyle\bigcup_{i \leq n} C_i \cup B) \\ &\leq\; \mu(B) + \Sigma_n\, \mu(C_n) \\ &\leq\; \mu(B) + \varepsilon + \Sigma_n\, \mu(A_n - B_n) \end{aligned}$$

Da ε beliebig klein ist, gilt

$$\mu(A - B) \;=\; \mu(A) - \mu(B) \;\leq\; \Sigma_n\, \mu(A_n - B_n).$$

Die Supremums-Ausdehnung der ersten Proposition ist eindeutig, wenn wir die $\uparrow$-Stetigkeit von μ erhalten wollen. Damit haben wir gezeigt:

Korollar

Sei μ ein (endliches) Maß auf einer Algebra $\mathcal{A}$. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf ring($\mathcal{A}_\sigma$).

Damit sind wir für eine rekursive Ausdehnung gut gerüstet. Wir müssen lediglich noch eine Approximationseigenschaft induktiv aufrechterhalten, um über den Limesschritt zu kommen. Genaueres zeigt der folgende Beweis.

Satz *(Satz von Carathéodory, endliche Version)*

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra auf X, und sei μ_0 ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$. Dann existiert genau eine Fortsetzung von μ_0 zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathcal{A})$. Für alle $A \in \sigma(\mathcal{A})$ gilt zudem (mit einer nichtleeren Menge im Infimum):

$$\text{(Ap)} \quad \mu(A) \;=\; \inf(\{\, \mu(U) \mid U \in \mathcal{A}_\sigma,\ A \subseteq U \,\}).$$

Beweis

Sei $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha < \omega_1$, die Ring-Hierarchie von $\mathcal{A}$. Wir definieren rekursiv Maße μ_α auf $\mathcal{A}_\alpha$ derart, dass $\mu_\alpha \,|\, \mathcal{A}_\beta = \mu_\beta$ für alle $\beta < \alpha$ gilt. Für alle $\alpha < \omega_1$ zeigen wir dabei die folgende Approximationseigenschaft:

$$(\text{Ap}_\alpha) \quad \mu(A) \;=\; \inf(\{\, \mu(U) \mid U \in \mathcal{A}_\sigma,\ A \subseteq U \,\}) \;\text{ für alle } A \in \mathcal{A}_\alpha$$

μ_0 auf $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ ist bereits definiert, und trivialerweise gilt (Ap_0).

Nachfolgerschritt von α *nach* $\alpha + 1$:

Sei $\mu_{\alpha+1}$ die eindeutige Fortsetzung von μ_α zu einem Maß auf

$$\mathcal{A}_{\alpha+1} \;=\; \mathrm{ring}((\mathcal{A}_\alpha)_\sigma)$$

Die Induktionsvoraussetzung (Ap_α) und ein „$\varepsilon = \Sigma_n\, \varepsilon_n$"-Argument zeigen, dass die Approximationseigenschaft auch noch für alle $A \in (\mathcal{A}_\alpha)_\sigma$ gilt (im Spezialfall $\alpha = 0$ ist dies sogar trivial). Aus (+) der Proposition folgt dann leicht ($\mathrm{Ap}_{\alpha+1}$), da die Elemente von $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ endliche Summen von Differenzen in $(\mathcal{A}_\alpha)_\sigma$ sind.

Limesschritt λ

Sei $\mu_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mu_\alpha$. Dann ist μ_λ ein Inhalt auf $\mathcal{A}_\lambda$. Es gilt (Ap_λ), da nach Induktionsvoraussetzung (Ap_α) für alle $\alpha < \lambda$ gilt. Ist $A = \Sigma_n\, A_n$ in $\mathcal{A}_\lambda$ und $\varepsilon = \Sigma_n\, \varepsilon_n$ mit $\varepsilon_n > 0$, so gibt es nach (Ap_λ) $U_n \supseteq A_n$ in $\mathcal{A}_\sigma$ mit

$$\mu_\lambda(U_n) \;\leq\; \mu_\lambda(A_n) \;+\; \varepsilon_n.$$

Dann gilt:

$$A \;\subseteq\; \bigcup_n U_n \in (\mathcal{A}_\sigma)_\sigma \;=\; \mathcal{A}_\sigma \;\subseteq\; \mathcal{A}_1$$

$$\mu_\lambda(A) \;\leq\; \mu_\lambda(\bigcup_n U_n) \;\leq\; \Sigma_n\, \mu_\lambda(U_n) \;\leq\; \varepsilon + \Sigma_n\, \mu_\lambda(A_n)$$

Also ist $\mu_\lambda(A) \leq \Sigma_n\, \mu_\lambda(A_n)$. Die Ungleichung „$\geq$" gilt nach Monotonie. Damit ist μ_λ ein Maß auf $\mathcal{A}_\lambda$.

Wir setzen nun $\mu = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mu_\alpha$. Dann ist μ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$.

Die Eindeutigkeit ist klar.

Die Notation „$\mu = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mu_\alpha$" ist eine hinsichtlich des mengentheoretischen Funktionsbegriffs korrekte und bequeme Schreibweise. Äquivalent ist: Wir setzen $\mu(A) = \mu_\alpha(A)$ für alle $\alpha < \omega_1$ und $A \in \mathcal{A}_\alpha$.

Aus Sicht des klassischen Beweises konstruieren wir also entlang der Ring-Hierarchie von $\mathcal{A}$ ein Maß und zeigen dabei, dass das konstruierte Maß auf allen Stufen mit dem üblichen, durch die rechte Seite von (Ap) gegebenen, äußeren Maß von μ_0 übereinstimmt. (Ap) wird für den Limesschritt gebraucht, die Vereinigung einer $\subseteq$-aufsteigenden Kette von Maßen ist ein Inhalt, im allgemeinen aber kein Maß. Wir zeigen aber, dass die Vereinigungen solcher Ketten entlang der Ring-Hierarchie durch das Maß auf $\mathcal{A}_\sigma$ „kontrolliert" werden, und dies genügt, um im Limesschritt ein Maß zu erhalten.

Für obigen Beweis muss ein äußeres oder inneres Maß auf der vollen Potenzmenge des Raumes X nicht eingeführt werden. An keiner Stelle wird eine Menge benutzt, die nicht zur erzeugten σ-Algebra von $\mathcal{A}$ gehört. Die ad hoc Definition der Carathéodory-Bedingung (des „messbaren Zerlegers") und die zugehörigen Tricks entfallen. Allerdings brauchen wir die Ordinalzahlen zumindest bis ω_1 als

Hilfsmittel. Alleine schon eine rekursive Erzeugung von σ-Algebren scheint diesen Mehraufwand zu rechtfertigen, da erst sie vor Augen führt, welche Mengen die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra enthält; das Prädikat „erzeugen" oder „generieren" wird der rekursiven Konstruktion sehr viel besser gerecht als der Schnittdefinition.

Der Autor darf hinzufügen, dass wir hier zwei Zugänge und Beweise vergleichen, aber nicht gegeneinander ausspielen wollen. Aus mengentheoretischer Sicht ist zum Beispiel eine auf der vollen Potenzmenge definierte Funktion wie das äußere Maß ein für sich interessantes und natürliches Objekt. Und der Schnittdefinition wird man zugute halten, dass sie in unkomplizierter Weise ein „Universum" zur Verfügung stellt, von dem sichergestellt ist, dass es genügend viele Mengen enthält, um die gewünschten Operationen darin ausführen zu können.

Aus der endlichen Version lässt sich der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für σ-finite Maße auf Algebren durch die übliche Stückelung gewinnen. Alternativ kann man auch von vornherein unendliche Werte zulassen und den Fortsetzungssatz von Hausdorff entsprechend verallgemeinern. Im nicht σ-finiten Fall geht dann die Eindeutigkeit beim Übergang von $(\mathcal{R}_\alpha)_\sigma$ nach $\mathcal{R}_{\alpha+1}$ verloren. Insgesamt erhält man den vollen Fortsetzungssatz von Carathéodory und eine größtmögliche Fortsetzung des gegebenen Maßes. Details hierzu findet der Leser in [Deiser 2007b].

Wichtiger ist aber folgendes: Obiges Vorgehen legt nahe, die entwickelte Inhaltstheorie auf Verbänden zu einer Maßtheorie auf Verbänden auszudehnen. Dabei spielen Regularitätsbedingungen wie (+) eine wichtige Rolle. Der große Vorteil dieses Ansatzes ist, dass die Rekursion dann allgemeiner mit einem Verband starten kann und nicht nur mit einem Ring oder einer Algebra. Dadurch erhält man die wichtigen topologischen und abstrakten Regularitätssätze, die in der Maßtheorie üblicherweise erst spät entwickelt werden, geschenkt. Insgesamt hinterlassen sowohl die Regularitätstheorie als auch der rekursive Ansatz den Eindruck, dass Verbände anstelle der üblichen Ringe bzw. der damit eng verwandten Semiringe die angemessene Primstruktur der Maßtheorie sind. Damit knüpfen wir wieder bei Hausdorff an, bei dem ein derartiger Weg vorgezeichnet schien.

Verbände sind in der Maßtheorie in jüngerer Zeit vor allen von H. König propagiert worden (vgl. z. B. [König 1997]). König arbeitet mit Verallgemeinerungen der inneren und äußeren Maßes, um optimale topologische und abstrakte Regularitätsergebnisse zu erzielen. Der hier vorgeschlagene Ansatz liefert mit rekursiven Methoden dieselben – beweisbar optimalen – Ergebnisse im Hinblick auf innere und äußere Approximationen. Wir verweisen den Fachmann der Maßtheorie hier noch einmal auf die ausführliche Darstellung [Deiser 2007b].

9. Borel-messbare Funktionen

Mit Hilfe transfiniter Rekursion lassen sich auch Funktionenklassen hierarchisch anordnen. Wir definieren für einen metrisierbaren topologischen Raum X durch Rekursion über $\alpha < \omega_1$:

Baire-Hierarchie

Die Hierarchie beginnt mit

$$\mathrm{Baire}_0(X) \;=\; \{ f \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ ist stetig} \}$$

Für $1 \leq \alpha < \omega_1$ setzen wir nun (mit punktweisen Limiten von Funktionenfolgen):

$$\mathrm{Baire}_\alpha(X) \;=\; \{ f \mid f = \lim_n f_n \text{ mit } f_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathrm{Baire}_\beta(X) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \}$$

Die Folge $\langle \mathrm{Baire}_\alpha(X) \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ heißt die *Baire-Hierarchie von X (bzgl.* $\mathbb{R}$ *mit der Standardtopologie)*. Wir setzen weiter

$$\mathrm{Baire}_{\omega_1}(X) \;=\; \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathrm{Baire}_\alpha(X)$$

Die Menge $\mathrm{Baire}_{\omega_1}(X)$ ist abgeschlossen unter punktweisen Limiten. Für alle $\alpha \leq \omega_1$ ist $\mathrm{Baire}_\alpha(X)$ ein Unterraum von $V = \{ f \mid f : X \to \mathbb{R} \}$.

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *Borel-messbar*, falls die Urbilder von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borel-Mengen von X sind. Die Baire-Hierarchie ist de facto eine Organisation dieser Funktionen, denn es gilt:

$$\mathrm{Baire}_{\omega_1}(X) \;=\; \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Borel-messbar} \}$$

Siehe [Kechris 1995, Kap. 24] oder [Deiser 2007, 2.6] für einen Beweis.

Die Baire-Hierarchie ist die historisch erste analytische Hierarchie. Sie wurde von René Baire bereits 1899 untersucht, während die Borel-Hierarchie explizit erst bei Hausdorff 1914 auftaucht, und dann auch erst im Laufe der folgenden Jahrzehnte genauer untersucht wurde. Borel selbst scheint nur die ersten Stufen der Hierarchie genauer betrachtet zu haben.

10. Atomfreie Maße

Auch für „kleinere“ Sätze der Maßtheorie können transfinite Methoden sehr klare Beweise liefern. Wir geben hierzu noch ein Beispiel.

Ein auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiertes (nicht notwendig endliches) Maß μ heißt *atomfrei*, falls es für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ ein $B \in \mathcal{A}$ gibt mit $B \subseteq A$ und $0 < \mu(B) < \mu(A)$.

Ausgangspunkt ist folgende Eigenschaft:

Satz *(kleine Teilmengen in atomfreien Maßen)*

Sei μ ein atomfreies Maß auf $\mathcal{A}$. Weiter seien $A \in A$ mit $\mu(A) > 0$, und es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$ und $0 < \mu(B) < \varepsilon$.

Beweis

Sei n derart, dass $\varepsilon < 1/2^n$. Sei $A_0 \subseteq A$ mit $\mu(A_0) < \infty$. Weiter sei $A_1 \subseteq A_0$ mit

$$0 < \mu(A_1) \leq \mu(A_0 - A_1) < \mu(A_0)$$

Dann ist $\mu(A_1) \leq 1/2\ \mu(A_0)$. Eine Iteration dieses Verfahrens liefert

$$A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq A_0$$

mit $\mu(A_n) \leq 1/2^n\ \mu(A_0)$. Dann ist A_n wie gewünscht.

Damit zeigen wir:

Satz *(Wertebereich atomfreier Maße)*

Sei μ ein atomfreies Maß auf $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathrm{rng}(\mu) = [0, \mu(X)]$.

Beweis

Sei $a \in\ ]0, \mu(X)]$. Wir definieren rekursiv $A_\alpha \in \mathcal{A}$, solange $\mu(A_\alpha) \leq a$ gilt:

$$A_0 = \emptyset$$

$$A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup A, \text{ wobei } A \in \mathcal{A} \text{ beliebig mit:}$$

$$A_\alpha \cap A = \emptyset,\ \mu(A) > 0,\ \mu(A_\alpha \cup A) < a$$

$$A_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha \quad \text{für } \lambda \text{ Limes}$$

Die Folge der $\mu(A_\alpha)$ ist strikt aufsteigend, also bricht die Rekursion vor ω_1 ab, und zwar im Limesschritt mit einem A_λ (denn ist $\mu(A_\alpha) < a$, so können wir ein $A \subseteq X - A_\alpha$ mit Maß kleiner als $\varepsilon = a - \mu(A_\alpha)$ finden und so $A_{\alpha+1}$ bilden). Nach Konstruktion gilt $\mu(A_\lambda) \geq a$. Sei $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n < \ldots$ eine Folge mit $\lambda = \sup_n \beta_n$. Dann gilt $\mu(A_\lambda) = \sup_n \mu(A_{\beta_n}) \leq a$, da $A_{\beta_n} \uparrow A_\lambda$. Also $\mu(A_\lambda) = a$.

Der Leser vergleiche [Dudley 1989, S. 83] und [Fremlin 2001, S. 43] für alternative Beweise ohne transfinite Zahlen.

Der volle Wertebereich eines atomfreien Maßes ist, als „Zwischenwertsatz der Maßtheorie“, sicher für sich genommen von Interesse. Er ist darüber hinaus aber ein wichtiges Element im Beweis des folgenden in der Mengenlehre bekannten Satzes: Existiert ein atomfreies Maß μ, das auf der vollen Potenzmenge einer beliebigen (notwendig überabzählbaren) Menge M definiert ist, so existiert eine Fortsetzung des Lebesgue-Maßes zu einem Maß auf der vollen Potenzmenge von $\mathbb{R}$ (siehe etwa [Deiser 2007, S. 239] für einen Beweis). Diese Fortsetzung ist dann notwendig nicht mehr translationsinvariant.

Literatur

Baire, René 1899 *Sur les fonctions de variables réelles.* Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. IIIa 3 (1899), S. 1 – 123.

Banach, Stefan 1923 *Sur le problème de la mesure.* Fundamenta Mathematicae 4 (1923), S. 7 – 33.

Bendixson, Ivar 1883 *Quelques théorèmes de la théorie de ensembles de points.* Acta Mathematica 2 (1883), S. 415 – 429.

Cantor, Georg 1879 – 84 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 1 – 6.* Mathematische Annalen: 15 (1879), S. 1 – 7; 17 (1880), S. 355 – 358; 20 (1882), S. 113 – 121; 21 (1883), S. 51 – 58; 21 (1883), S. 545 – 591; 23 (1884), S. 453 – 488.

Carathéodory, Constantin 1914 *Über das lineare Maß von Punktmengen. Eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs.* Göttinger Nachrichten 1914, S. 404 – 425.

– 1917 *Vorlesungen über reelle Funktionen.* B. G. Teubner, Leipzig. (2. Auflage 1927).

Deiser, Oliver 2004 *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo.* 2. erweiterte Auflage. Springer, Berlin.

– 2007 *Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen.* Springer, Berlin.

– 2007b *Measure theory built on lattices and transfinite recursion.* about 23 pages, preprint.

Dudley, Richard M. 1989 *Real Analysis and Probability.* 4. Auflage, Wadsworth, Belmont (California).

Elstrodt, Jürgen 2005 *Maß- und Integrationstheorie.* 4. Auflage. Springer, Berlin.

Fremlin, David H. 2000, 2001 *Measure Theory. Volume 1, 2.* Biddles Short Run Books, King’s Lynn.

Hartogs, Friedrich 1915 *Über das Problem der Wohlordnung.* Mathematische Annalen 76, S. 438 – 443.

Hausdorff, Felix 1914/2002 *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit & Comp., Leipzig. Nachdrucke bei Chelsea, New York 1949, 1965, 1978. Kommentierter Nachdruck bei Springer, Berlin 2002 als Band II der Hausdorff-Werkausgabe.

Kechris, Alexander 1995 *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics 156, Springer, New York.

Kelley, J. L. / Srinivasan, T. P. 1971 *Pre-Measures on Lattices of Sets.* Mathematische Annalen 190 (1971), 233 – 241.

Kisyński, J. 1968 *Remark on strongly additive set functions.* Fundamenta Mathematicae 63 (1968), S. 327 – 332.

König, Heinz 1997 *Measure and Integration.* Springer, Berlin.

Lipecki, Z. 1971 *On strongly additive set functions.* Colloquium Mathematicum 22 (1971), S. 255 – 256.

Neumann, John von 1923 *Zur Einführung der transfiniten Zahlen.* Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum 1922/1923, Szeged, S. 199 – 208.

Odell, E. 2004 *Ordinal indices in Banach spaces.* Extracta Mathematicae 19 (2004), S. 93 – 125.

Pettis, B. J. 1951 *On the extension of measures.* Annals of Mathematics 54 (1951), S. 186 – 197.

Zorn, Max 1935 *A remark on method in transfinite algebra.* Bulletin of the American Mathematical Society 41 (1935), S. 667 – 670.

2. Abschnitt

Zur Geschichte der Mengenlehre

1. „In der Unvollkommenheit des ersten Conceptes“

Die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Wir diskutieren die verschiedenen Beweise, die Cantor für die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen gefunden hat. Ein Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem allerersten nur brieflich überlieferten Beweis vom 7. Dezember 1873. Wir argumentieren, dass Cantor hier im Wesentlichen bereits den Baireschen Kategoriensatz bewiesen hat.

1. Einführung

Die Geschichte der reellen Zahlen ist von einem großen wiederkehrenden Thema durchdrungen: Die reellen Zahlen sind komplizierter und reichhaltiger als man annehmen möchte. Die Pythagoreer entdeckten im 5. Jahrhundert vor Christus die Existenz irrationaler Zahlen: Das Kontinuum lässt sich nicht auf eine reine Verhältnislehre reduzieren. (Siehe [Christianidis 2004] für eine Auswahl von Aufsätzen zur Geschichte und Bedeutung der Entdeckung der irrationalen Verhältnisse durch die Griechen.) Liouville bewies 1844 stärker die Existenz von transzendenten Zahlen: Nicht jeder Punkt des Kontinuums ist Lösung einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten (veröffentlicht in [Liouville 1851]). Cantor zeigte 1873 dann noch einmal stärker, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind: Jede Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ reeller Zahlen lässt reelle Zahlen aus (veröffentlicht in [Cantor 1874, 1879, 1892]). Die sich anschließende eingehende Untersuchung dieses Phänomens ergab zudem, dass wir die Mächtigkeit der reellen Zahlen im Rahmen der klassischen Mathematik nicht bestimmen können: Die Kontinuumshypothese ist weder beweisbar noch widerlegbar ([Gödel 1938], [Cohen 1963]). Die Menge der reellen Zahlen bleibt in dieser Hinsicht dunkel – eine beunruhigende Erkenntnis.

Die Kontinuumshypothese besagt: Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar, so gibt es eine Bijektion zwischen A und $\mathbb{R}$. Anders formuliert: Es gibt keine Mächtigkeit zwischen $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$. Die Frage, ob diese Hypothese richtig ist oder nicht ist das Kontinnumsproblem. Gödel (1938) und Cohen (1963) zeigten die Unlösbarkeit des Kontinuumsproblem innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Axiomatik ZFC, die für die gesamte klassische Mathematik ausreicht. Siehe hierzu auch Abschnitt 6.

Zwei weitere Aspekte der Komplexität von $\mathbb{R}$ sind: Erstens die Frage nach der Existenz und mathematischen Einbindung infinitesimaler Größen, d.h. die Diskussion um den „korrekten“ Kontinuumsbegriff selbst. Und zweitens die Untersuchung von einfachen Teilmengen von $\mathbb{R}$ innerhalb der deskriptiven Mengenlehre, die gezeigt hat, dass viele hier auftretende Fragen innerhalb des klassischen Rahmens ebenso unlösbar sind wie die Kontinuumshypothese, z. B. die Lebesgue-Messbarkeit der sog. projektiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ (siehe hierzu etwa [Deiser 2007, Kapitel 2.6]).

Der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen wohnt ein Zauber inne, der über die mathematische Bedeutung des Resultats weit hinausreicht. Hält man an der Existenz der Menge $\mathbb{R}$ fest – wie es ja die klassische, mengentheoretisch axiomatisierte Mathematik tut, die $\mathbb{R}$ aus der Potenzmenge der natürlichen Zahlen gewinnt – so ergibt sich ein faszinierendes Bild der „Größenunterschiede im Unendlichen“, in dem die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ und die Menge ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ der reellen Funktionen nur drei von unübersehbar vielen Stufen markieren. Cantor griff in seinen Arbeiten und Briefen die uralte theologische und philosophische Diskussion über das Unendliche auf, und er sah seine mathematische Forschung auch als eine Bereicherung und Vertiefung dieser Diskussion an. Diese Haltung hat der modernen von Cantor geprägten Mathematik einen „romantischen Charakter“ verliehen, der sie seither ebenso befruchtet wie belastet.

In diesem Artikel zeichnen wir die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen durch Georg Cantor aus rein mathematischer Sicht nach, indem wir die vier von Cantor zwischen 1873 und 1895 gefundenen Beweise im Lichte ihrer heutigen Bedeutung studieren. Diese Beweise sind:

Erster Beweis

Der brieflich an Dedekind mitgeteilte Beweis vom 7. Dezember 1873.

Zweiter Beweis

Der in „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller algebraischen Zahlen“ veröffentlichte Beweis von 1874.

Dritter Beweis

Der auf der Tagung der DMV in Halle 1891 vorgestellte Beweis, der das „Cantorsche Diagonalverfahren“ eingeführt hat.

Vierter Beweis

Der von Cantor nicht explizit notierte Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$, der sich aus seiner ordnungstheoretischen Charakterisierung der rationalen Zahlen von 1895 ergibt.

2. Der erste Beweis vom 7. Dezember 1873

In einem denkwürdigen Brief an Richard Dedekind vom 29. November 1873 stellt Georg Cantor die Frage, ob – in späterer Formulierung – die reellen Zahlen abzählbar seien.

Siehe [Cantor 1932], [Cantor / Dedekind 1937], [Dugac 1976], [Cantor 1991] für den Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind. Vgl. weiter auch [Grattan-Guinness 1974].

Dedekind liefert sogleich einen Beweis der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen, kann aber die Frage von Cantor nicht beantworten; er billigt auch dem Problem keine allzu große Bedeutung zu, mangels praktischen Interesses. In seinem Antwortschreiben vom 2. Dezember bestätigt Cantor Dedekinds Einschätzung, weist aber darauf hin, dass sich aus der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen ein neuer Beweis der Existenz von transzendenten Zahlen ergeben würde, wenn man die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zeigen könnte. Diese einfache Folgerung hat Dedekind übersehen. In seinen privaten Aufzeichnungen über den Briefwechsel mit Cantor notiert er:

Dedekind (Aufzeichnungen zum Briefwechsel mit Cantor 1873): „Die von mir ausgesprochene Meinung aber, dass die erste Frage [nach der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen] nicht zuviel Mühe verdiene, weil sie kein besonderes praktisches Interesse habe, ist durch den von Cantor gegebenen Beweis für die Existenz von transzendenten Zahlen … schlagend widerlegt.“ [Cantor / Dedekind 1937, S. 18]

In der Folge kommt es zu einer Verstimmung zwischen Dedekind und Cantor. Dedekind wirft Cantor in seinen privaten Aufzeichnungen vor, seinen Beweis der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen „fast wörtlich“ in der späteren Veröffentlichung von 1874 wiedergegeben zu haben, ohne Referenzen an Dedekind ([Cantor / Dedekind 1937, S. 18f]). Andererseits hatte Cantor bereits in seinem ersten Brief vom 29. November die Abzählbarkeit der Menge aller endlichen Tupel $(n_1, \ldots, n_k)$ natürlicher Zahlen erwähnt, aus der sich die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen unschwer ergibt. Möglicherweise war aber der Vorfall der Grund dafür, dass der Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind nach 1874 ins Stocken geriet (vgl. hierzu speziell auch [Ferreirós 1999, S. 239f]).

In seinem Brief vom 2. Dezember schreibt Cantor, dass sich ihm das Problem der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen bereits vor mehreren Jahren gestellt habe, er sich aber nie ernsthaft damit beschäftigt hätte. Wie Cantor auf die Frage gestoßen ist, ist nicht bekannt. Einer Überlieferung zufolge hat er bereits als Student die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen in einem Seminar von Weierstraß vorgeführt, und dann ist die Frage nach der Abzählbarkeit aller reellen Zahlen nur natürlich (vgl. [Fraenkel 1930, S. 199]). Als eine direkte Inspirationsquelle kommt Cantors Konstruktion der reellen Zahlen über Fundamentalfolgen rationaler Zahlen von 1872 in Frage [Cantor 1872].

Am 7. Dezember 1873 findet Cantor einen ersten Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. Keine Geschichte der modernen Mathematik kommt an dieser Entdeckung vorbei, ohne innezuhalten und ihre Bedeutung zu betrachten. Wir werden den Brief vom 7. Dezember gleich vollständig wiedergeben und zu dem Schluss kommen, dass Cantor im Wesentlichen bereits 1873 den Baireschen Kategoriensatz für das Kontinuum bewiesen hat.

Diese „Bairesche Lesart" des Briefbeweises scheint in der Literatur bislang nicht diskutiert zu werden (vgl. z. B. [Cantor 1991, S. 35f], [Dauben 1979b, S. 50f], [Ferreirós 1999, S. 177f], [Grattan-Guinness 2000, S. 88], [Hallett 1984, S. 75f], [Meschkowski 1967, S. 29f], [Purkert /Ilgauds 1987, S. 45f]).

Der weitere Gang der Geschichte ist, im Überblick, folgender. Sowohl Cantor als auch Dedekind finden unabhängig voneinander Modifikationen des Beweises vom 7. Dezember, die ihnen einfacher erscheinen. Dedekind teilt Cantor seinen vereinfachten Beweis brieflich am 8. Dezember mit, doch bereits am 9. Dezember, also wohl noch vor Ankunft seines eigenen Briefes erreicht ihn seinerseits ein Schreiben von Cantor, in dem dieser ebenfalls von einer gefundenen Vereinfachung spricht. Leider teilt Cantor seine neue Version nicht explizit mit. Dedekind notiert in seinen Aufzeichnungen, dass seine vereinfachte Darstellung „ebenfalls [wie schon sein Beweis der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen] fast wörtlich in Cantors Abhandlung (Crelle Bd. 77) übergegangen [ist]" [Cantor / Dedekind 1937, S. 19]. Eine Bemerkung in einem Brief von Cantor an Dedekind vom 25. Dezember 1873 hinterlässt den Eindruck, dass sich Cantor in der Tat bei Dedekind bedient hat – und sich gar nicht viel dabei dachte:

Cantor (Brief an Dedekind vom 25. Dezember 1873): „Dabei [bei der Abfassung der Publikation von 1874] kamen mir, wie Sie später finden werden, Ihre, mir so werthen, Bemerkungen und Ihre Ausdrucksweise sehr zu statten. Dies wollte ich mir erlauben, Ihnen mitzuteilen." ([Cantor / Dedekind 1937, S. 17]).

Möglicherweise waren die beiden von Cantor und Dedekind unabhängig voneinander gefundenen Modifikationen des Beweises in der Tat sehr ähnlich. Insgesamt musste es aber Dedekind irritieren, Teile aus seinen Briefen in Cantors Publikation zu finden. Der ganze Vorfall ist um so bedauerlicher, als die veröffentlichte Modifikation aus heutiger Sicht den mathematischen Reichtum des Briefbeweises nicht voll zur Geltung bringt.

Obwohl also Cantor und Dedekind selber von einem vereinfachten Beweis sprechen, lohnt es sich, auf die erste Quelle zurückzugreifen, bei der sich zudem keine urheberrechtlichen Fragen ergeben. Wir geben den Brief von Cantor an Dedekind vom 7. Dezember 1873 vollständig wieder. Er ist auch heute noch gut lesbar, und der darin vorgestellte Beweis ist aus heutiger Sicht alles andere als „recht compliziert", wie Dedekind in seinen Aufzeichnungen urteilte. Cantor schreibt ([Cantor 1991, S. 35f], vgl. auch [Cantor / Dedekind 1937, S. 14f]):

Hochgeehrter Herr Kollege!

In den letzten Tagen habe ich die Zeit gehabt, etwas nachhaltiger meine Ihnen gegenüber ausgesprochene Vermutung zu verfolgen; erst heute glaube ich mit der Sache fertig geworden zu sein; sollte ich mich jedoch täuschen, so finde ich gewiss keinen nachsichtigeren Beurtheiler, als Sie. Ich nehme mir also die Freiheit, Ihrem Urtheile zu unterbreiten, was soeben in der Unvollkommenheit des ersten Conceptes zu Papier gebracht ist.

Man nehme an, es könnten alle positiven [reellen] Zahlen $\omega < 1$ in die Reihe gebracht werden:

(I) $\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3, \ \ldots, \ \omega_n, \ \ldots$

Auf ω_1 folgend sei ω_α das nächst grössere Glied, auf dieses folgend ω_β das nächst grössere, u. s. f. Man setze: $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_\alpha = \omega_1^2$, $\omega_\beta = \omega_1^3$ u. s. f. und hebe aus (I) die unendliche Reihe aus:

$\omega_1^1, \ \omega_1^2, \ \omega_1^3, \ \ldots, \ \omega_1^n, \ \ldots$

In der übrig bleibenden Reihe werde das erste Glied mit ω_2^1, das nächst folgende grössere mit ω_2^2 bezeichnet, u. s. f. so hebe man die zweite Reihe aus:

$\omega_2^1, \ \omega_2^2, \ \omega_2^3, \ \ldots, \ \omega_2^n, \ \ldots$

Wird diese Betrachtung fortgesetzt, so erkennt man dass die Reihe (I) sich in die unendlich vielen zerlegen lässt:

(1) $\omega_1^1, \ \omega_1^2, \ \omega_1^3, \ \ldots, \ \omega_1^n, \ \ldots$

(2) $\omega_2^1, \ \omega_2^2, \ \omega_2^3, \ \ldots, \ \omega_2^n, \ \ldots$

(3) $\omega_3^1, \ \omega_3^2, \ \omega_3^3, \ \ldots, \ \omega_3^n, \ \ldots$

…

in jeder von ihnen wachsen aber die Glieder fortwährend von links nach rechts zu; es ist:

$\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}$

Man nehme nun ein Intervall (p … q) so an, dass kein Glied der Reihe (1) in ihm liegt; also etwa innerhalb ($\omega_1^1 \ldots \omega_1^2$); nun könnten auch etwa sämtliche Glieder der zweiten Reihe, oder der dritten ausserhalb (p … q) liegen; es muss jedoch einmal eine Reihe kommen, ich will sagen die k^{te}, bei welcher nicht alle Glieder ausserhalb (p … q) liegen; (denn sonst würden die innerhalb (p … q) liegenden Zahlen nicht in (I) enthalten sein, gegen die Voraussetzung); dann kann man ein Intervall (p′ … q′) innerhalb (p … q) fixieren, so dass die Glieder der k^{ten} Reihe alle außerhalb desselben liegen; von selbst verhält sich dann (p′ … q′) in gleicher Weise in Bezug auf die vorhergehenden Reihen; im weiteren Verlaufe muss jedoch eine k'^{te} Reihe erscheinen, deren Glieder nicht sämmtlich außerhalb (p′ … q′) liegen und man nehme dann innerhalb (p′ … q′) ein drittes Intervall (p″ … q″) an, so dass alle Glieder der k'^{ten} Reihe ausserhalb desselben liegen.

So sieht man, dass es möglich ist eine unendliche Reihe von Intervallen zu bilden:

(p … q), (p′ … q′), (p″ … q″), …

von denen jedes die folgenden einschliesst und die zu unsern Reihen (1), (2), (3), … sich wie folgt verhalten:

Die Glieder der 1^{ten}, 2^{ten}, …, $k - 1^{\text{ten}}$ Reihe liegen ausserhalb (p … q).

Die Glieder der k^{ten}, …, $k' - 1^{\text{ten}}$ Reihe liegen ausserhalb (p′ … q′).

Die Glieder der k'^{ten}, …, $k'' - 1^{\text{ten}}$ Reihe liegen ausserhalb (p″ … q″)

…

Es lässt sich nun stets *wenigstens* eine Zahl, ich will sie η nennen, denken, welche im Innern eines jeden dieser Intervalle liegt; von dieser Zahl η, welche offenbar $> 0/< 1$, sieht man rasch, daß sie in keiner unserer Reihen (1), (2), …, (n), enthalten sein kann. So würde man, von der Voraussetzung ausgehend, dass alle Zahlen $> 0/< 1$ in (I) enthalten seien, zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt sein, daß eine bestimmte Zahl $\eta > 0/< 1$ *nicht* unter (I) zu finden sei; folglich ist die Voraussetzung eine unrichtige gewesen.

So glaube ich schließlich zu dem Grunde gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen früheren Briefen mit (x) bezeichnete Inbegriff *nicht* dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen läßt.

Mit den besten Grüssen

Ihr ergebenster

Georg Cantor

Zitiert wurde der Brief nach [Cantor 1991] unter Beibehaltung der Orthographie.

Die tragende Struktur dieses Arguments ist die folgende: Wir betrachten Mengen $M_n \subseteq \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ (im Brief: $M_n = \{ \omega_n^i \mid i \in \mathbb{N} \}$). Gesucht ist eine reelle Zahl x^* mit $x^* \notin \bigcup_n M_n$. Um ein solches x^* zu finden, konstruieren wir eine Folge von abgeschlossenen geschachtelten Intervallen I_n positiver Länge mit

$$I_n \cap M_n = \emptyset \text{ für alle } n$$

(im Brief: $I_1 = [p \dots q]$, $I_2 = [p' \dots q']$, usw.). Gelingt dies, so ist jedes Element

$$x^* \in \bigcap_n I_n \ (\neq \emptyset)$$

wie gewünscht. Die Konstruktion der Intervalle I_n ist aber offenbar möglich, wenn für alle $M = M_n$ folgende Bedingung erfüllt ist:

(+) Ist $I \neq \emptyset$ ein Intervall positiver Länge, so gibt es ein Intervall $J \subseteq I$ positiver Länge mit $J \cap M = \emptyset$.

Die Bedingung (+), die de facto von Cantor zur Konstruktion der Intervallschachtelung benutzt wird, ist heute als M ist *nirgendsdicht* bekannt. Das Argument von Cantor zeigt klar:

Satz *(Bairescher Kategoriensatz für $\mathbb{R}$)*

Ist M_n eine Folge von nirgendsdichten Teilmengen von $\mathbb{R}$, so enthält die Vereinigung aller M_n kein Intervall $I \neq \emptyset$ positiver Länge.

In dieser Form erscheint der Satz in [Baire 1899, S. 65]. In der äquivalenten dualen Form besagt das Ergebnis, dass der Durchschnitt abzählbar vieler offener und dichter Teilmengen von $\mathbb{R}$ wieder dicht ist.

Es ist müßig zu diskutieren, warum Dedekind und Cantor der originale Beweis als kompliziert erschienen ist, und warum sie den vollen mathematischen Gehalt des Arguments nach einer gefundenen Modifikation anscheinend nicht weiter untersucht haben. Sicherlich ist die Briefkonstruktion nicht optimal zugeschnitten für einen Beweis, der möglichst direkt die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ zeigen will. Sso spielt etwa die Konstruktion der Matrix ω_n^k keine wesentliche Rolle. Wir geben einen solchen Zuschnitt im nächsten Abschnitt. Wie dem auch sei: Der Beweis vom 7. Dezember zeigt den Baireschen Kategoriensatz für das Kontinuum, den Baire erst 1899 veröffentlicht hat.

Bei dieser Einschätzung ist auch erwähnenswert, dass die Eigenschaften *dicht* und *überall-dicht in einem Intervall* in Cantors Arbeiten über „Lineare Punktmannigfaltigkeiten“ aus den 1880er Jahren eine wichtige Rolle spielen (siehe z. B. [Cantor 1879, S. 2f], [Cantor 1880, S. 358], [Cantor 1882, S. 114]). Cantor hat aber wohl die Aussage des Baireschen Satzes nie explizit formuliert.

Insgesamt können wir den Baireschen Kategoriensatz historisch wie inhaltlich als eine natürliche Verallgemeinerung der Überabzählbarkeit jedes nichtleeren offenen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ lesen: Die Überabzählbarkeit von I besagt, dass I nicht „klein“ ist im Sinne einer abzählbaren Vereinigung von einzelnen Punkten. Der Bairesche Kategoriensatz besagt stärker, dass I nicht „klein“ ist im Sinne einer abzählbaren Vereinigung von nirgendsdichten Mengen. Das Intervall I ist, wie wir heute sagen, nicht *mager*.

Die Isolation und begriffsbildende Analyse der tragenden Bedingungen eines Beweises gilt heute allgemein als ein wichtiger Schritt der mathematischen Erkenntnis, und in keinem Falle soll hier Cantor ein erst viel später in seiner Bedeutung erkannter Satz zugeschrieben werden. Aber wir können Cantor den Beweis des Satzes zuschreiben. Und das Schicksal des Arguments ist bemerkenswert: Cantor veröffentlichte nur eine Variante des Arguments – möglicherweise sogar in Dedekinds Worten. Weiter hat dann das spätere Diagonalverfahren auch diese Variante zumindest soweit verdrängt, dass viele Mathematiker die Beweise von 1873/74 nicht kennen und den Baireschen Kategoriensatz nicht im Zusammenhang mit der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen sehen.

In manchen Lehrbüchern der Analysis wird allerdings der erste Cantorsche Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ vorgestellt, siehe z. B. [Dieudonné 1985, S. 34].

Wir betrachten nun die veröffentlichte Cantor-Dedekind-Variante des Briefbeweises genauer.

3. Der veröffentlichte Beweis von 1874

Die Veröffentlichung des neuen abstrakten Beweises der Existenz transzendenter Zahlen kam wohl auf Vermittlung von Weierstraß zustande. Cantors Arbeit heißt „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", greift also aus heutiger Sicht nicht die primäre neue Erkenntnis in ihrem Titel auf. Ob die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen für sich stehend überhaupt veröffentlicht worden wäre, ist zweifelhaft. In seinem Brief an Dedekind vom 25. Dezember 1873 schreibt Cantor, dass er Weierstraß seine Resultate mitgeteilt habe. Zur Reaktion von Weierstraß lesen wir:

Cantor (Brief an Dedekind vom 25. Dezember 1873): „[Weiterstraß] meinte, ich müsste die Sache, soweit sie sich auf die algebraischen Zahlen bezieht, veröffentlichen." [Cantor / Dedekind 1937, S. 16f]

Der veröffentlichte Beweis der Überabzählbarkeit von 1874 verläuft, in modernisierter Notation, wie folgt. Für zwei reelle Zahlen $x \neq y$ setzen wir

$$I(x, y) \;=\; [x, y], \quad \textit{falls} \quad x < y, \qquad I(x, y) \;=\; [y, x] \quad \textit{sonst}.$$

Der Beweis von 1874

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ reelle Zahlen, und sei $I_0 = [a, b]$ mit beliebigen reellen Zahlen $a < b$. Wir finden ein $x^* \in I_0$ mit $x^* \neq x_n$ für alle $n \geq 1$. Hierzu konstruieren wir rekursiv geschachtelte abgeschlossene Intervalle I_n positiver Länge:

Sei I_n bereits konstruiert. Im Falle der Existenz seien dann x_k und x_m die ersten beiden voneinander verschiedenen Glieder der Folge, die im Inneren von I_n liegen. Wir setzen dann $I_{n+1} = I(x_k, x_m)$.

Ist I_{n+1} nicht definiert für ein n, so liegt höchstens ein Glied der Folge im Inneren von I_n, und damit lässt die Folge sogar ein offenes nichtleeres Intervall aus. Sind alle I_n definiert, so ist jedes x^* im nichtleeren Durchschnitt der I_n verschieden von allen Gliedern der Folge, wie eine einfache Überlegung zeigt.

Dieses Argument findet sich im Original in [Cantor 1874, S. 260f] und etwas ausführlicher auch in [Cantor 1879, S. 6 – 8]. Speziell in der ausführlichen Form ist der Beweis nicht mehr kürzer als der erste Briefbeweis.

Die Verbindung zum Baireschen Kategoriensatz ist bei diesem schrittweisen Ausheben von Intervallen immer noch spürbar, aber bei weitem nicht mehr so deutlich wie im Beweis des Briefes.

Aus heutiger Sicht lässt sich der Beweis vom 7. Dezember leicht in einer Weise notieren, die die Analogie zum Baireschen Satz klar herausstellt und dabei allen überflüssigen Ballast entfernt:

Variante des Beweises vom 7. Dezember

Seien wieder reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ und $I_0 = [a, b]$, $a < b$, gegeben. Wir definieren rekursiv Intervalle I_n wie folgt:

I_{n+1} = „ein abgeschlossenes Intervall $I \subseteq I_n$ positiver Länge mit $x_{n+1} \notin I$“.

(Konkret können wir zum Beispiel immer entweder das linke oder rechte Drittelintervall von I_n wählen. Das Auswahlaxiom muss nicht verwendet werden.)

Dann ist jedes $x^* \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ $(\neq \emptyset)$ verschieden von allen x_n.

Hier konstruieren wir Intervalle, die einzelnen Punkten fernbleiben. Den veröffentlichten Beweis von 1874 können wir auch in dieser Weise lesen, denn auch hier gilt für alle $n \geq 1$, dass $x_n \notin I_{n+1}$. Bei obiger Variante wird diese Eigenschaft aber in den Mittelpunkt gestellt. Cantor hat auf diese Eigenschaft explizit in seiner zweiten Darstellung des Argumentes hingewiesen (siehe [Cantor 1879, S. 6]. Ersetzen wirdie Punkte x_n durch nirgendsdichte Mengen M_n, so bleibt die Konstruktion durchführbar: Es existieren stets Intervalle, die den Mengen M_n fernbleiben. Das Argument zeigt so den Baireschen Kategoriensatz.

4. Das Diagonalargument von 1891

Es ist nicht genau bekannt, wann Cantor sein auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Halle 1891 vorgetragenes Diagonalargument gefunden hat. Er zeigt, dass die Menge aller *Belegungen* von $\mathbb{N}$, d.h. aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, überabzählbar ist:

Satz *(Überabzählbarkeit der 0-1-Folgen)*

Die Menge $F = \{ f \mid f : \mathbb{N} \to \{0, 1\} \}$ ist überabzählbar.

Beweis

Seien $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ Elemente von F. Wir definieren $f^* \in F$ durch

$f^*(n) = 1$, *falls* $f_n(n) = 0$

$f^*(n) = 0$, *falls* $f_n(n) = 1$

Dann ist $f^*(n) \neq f_n(n)$ für alle n. Also ist die Funktion f^* von jeder Funktion f_n verschieden.

Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen gewinnen wir hier aus der Gleichmächtigkeit der Mengen $\mathbb{R}$ und F. Diese Gleichmächtigkeit ist nicht überraschend, wenn wir an die Dualdarstellungen reeller Zahlen denken, deren Nachkommaanteile wir ja als Elemente von F lesen können. Die Feinheiten sind aber nicht völlig trivial, und zumindest ist die Verwendung des Satzes von Cantor-

Bernstein hilfreich. Deswegen hat sich für den Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ eine direkte Anwendung der Diagonalmethode durchgesetzt (siehe Beispiel (1) unten).

Allgemein zeigt das Diagonalargument, dass es für jede Menge M keine Bijektion zwischen M und der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M gibt. In dieser allgemeinen Form wird das Ergebnis heute zitiert als:

Satz *(Satz von Cantor)*

Sei M eine Menge, und sei G eine Funktion mit Definitionsbereich M. Dann liegt die Menge

$$D = \{ x \in M \mid x \notin G(x) \}$$

nicht im Wertebereich von G.

Insbesondere existiert kein surjektives $G : M \to \mathcal{P}(M)$.

Beweis

Annahme, es gilt $G(x) = D$ für ein $x \in M$. Dann gilt:

$x \in D$ *genau dann, wenn* $x \notin D$,

Widerspruch.

Cantors Diagonalargument spielt in der weiteren Geschichte der Mathematik in vielen Varianten eine wichtige Rolle. Wir nennen einige Beispiele.

Diagonalargumente in der Mathematik

(1) Angewendet auf eine Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ von reellen Zahlen in Dezimaldarstellung ergibt sich der bekannte Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ durch Diagonalisierung einer unendlichen Matrix von Nachkommastellen.

(2) Ein Diagonalargument zeigt folgenden Satz von Julius König und Ernst Zermelo von 1904:

> Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Teilmengen von $\mathbb{R}$ derart, dass jedes A_n von kleinerer Mächtigkeit ist als $\mathbb{R}$, so ist auch die Vereinigung aller A_n von kleinerer Mächtigkeit als $\mathbb{R}$.

Für einelementige Mengen M_n erhalten wir so wieder die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

(3) Das Diagonalargument von Cantor hat Bertrand Russell zur Entdeckung der Antinomie der Menge aller Mengen geführt, die sich selbst nicht als Element enthalten. Sei nämlich

$R = \{ x \mid x \text{ ist eine Menge mit } x \notin x \}$.

Dann gilt $R \in R$ genau dann, wenn $R \notin R$, *Widerspruch*. Die uneingeschränkte Mengenbildung durch Aufsammlung aller Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft ist also widersprüchlich und muss durch eine vorsichtigere Axiomatik ersetzt werden. Auf die Russellsche Klasse R kommt man durch Setzen von M = „die Menge aller Mengen“ und G = „die Identität“ im Satz von Cantor. Die Zusammenfassung

$$R = \{ x \in M \mid x \notin x \} = D$$

liegt nicht im Wertebereich der Identität auf M, ist also keine Menge.

(4) In der mathematischen Logik tauchen Diagonalargumente an prominenten Stellen auf, etwa im Beweis des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes oder im Beweis der Existenz einer effektiv aufzählbaren Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, die nicht berechenbar ist. Für eine derartige Menge A existiert ein Computerprogramm P, das die Elemente von A als Liste ausgibt, aber es gibt kein Computerprogramm P′, das bei Eingabe von n stets in korrekter Weise entscheidet, ob n ein Element von A ist oder nicht.

(5) Auf Lebesgue (1905) geht ein Diagonalargument zurück, das zeigt, dass die iterierte Anwendung der Operationen der abzählbaren Vereinigung und des abzählbaren Durchschnitts ausgehend von den offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ immer wieder neue Mengen hervorbringt und erst nach ω_1-vielen Schritten abgeschlossen ist (Reichhaltigkeit der sog. Borel-Hierarchie; vgl. hierzu auch den Essay „Ordinalzahlen in der Analysis und Maßtheorie“).

(6) Diagonalisierungen können benutzt werden, um schnell oder langsam wachsende Funktionen zu konstruieren. Paul du Bois-Reymond hat bereits 1875 in dieser Weise gezeigt, dass zu jeder Folge von immer langsamer gegen unendlich konvergierenden Funktionen immer noch eine Funktion existiert, die langsamer gegen unendlich konvergiert als alle Glieder der Folge. Genauer zeigte er (siehe [Bois-Reymond 1875, S. 365]):

Seien $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen mit der Eigenschaft:

$\lim f_n(x) = \infty$ und $\lim f_n(x)/f_{n+1}(x) = \infty$ für alle n.

Dann gibt es eine Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim g(x) = \infty$ und $\lim f_n(x)/g(x) = \infty$ für alle n.

Der Beweis ist die erste bekannte diagonale Konstruktion. Die Arbeit ist auf deutsch in den Annalen erschienen und enthält gleich im ersten Absatz Formulierungen wie „nachdem ich meine Scheu überwunden, das Wort ‚unendlich‘ … substantivisch zu gebrauchen“, die Cantors Interesse geweckt haben dürften. Es ist gut möglich, dass Cantor die Arbeit studiert hat.

5. Die ordnungstheoretische Überabzählbarkeit von 1895

Im ersten Teil seiner „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ von 1895 zeigt Cantor einen grundlegenden Satz über die rationalen Zahlen:

Satz *(ordnungstheoretische Charakterisierung von $\mathbb{Q}$)*

Sei M eine linear geordnete Menge mit den Eigenschaften:

(a) M ist abzählbar.

(b) M hat kein kleinstes und kein größtes Element.

(c) M ist dicht, d.h. für alle $a < b$ existiert ein c mit $a < c < b$.

Dann ist M ordnungsisomorph zu $\mathbb{Q}$, d.h. es existiert eine Bijektion $f : M \to \mathbb{Q}$, sodass für alle $a, b \in M$ gilt: $a < b$ genau dann, wenn $f(a) < f(b)$.

Beweisskizze

Seien $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ Aufzählungen von M bzw. $\mathbb{Q}$. Wir definieren $f : M \to \mathbb{Q}$ rekursiv durch „$f(x_n) = q_k$“, wobei k minimal ist, sodass die bislang definierte Funktion $f : \{ x_1, \ldots, x_n \} \to \mathbb{Q}$ weiterhin ordnungstreu (und insbesondere injektiv) ist. Wir erhalten so einen Isomorphismus $f : M \to \mathbb{Q}$.

Zusammen mit der Existenz von irrationalen Zahlen, d.h. der Unvollständigkeit der Ordnung $\mathbb{Q}$, erhalten wir einen neuen Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen:

Ordnungstheoretischer Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Annahme, $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann erfüllt $\mathbb{R}$ die Eigenschaften (a), (b) und (c). Nach dem Satz sind also $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ ordnungsisomorph. Dies ist aber nicht der Fall, da $\mathbb{R}$ vollständig, $\mathbb{Q}$ aber unvollständig ist, und ein Ordnungsisomorphismus die Vollständigkeit einer Ordnung erhält.

Eine linear geordnete Menge M heißt *(linear) vollständig*, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum in der Ordnung besitzt. Der Konvergenzbegriff für Folgen muss für dieses Argument nicht bekannt sein.

Dieser Beweis benutzt die pythagoreische Erkenntnis der Existenz von irrationalen Zahlen, oder gleichwertig die Existenz von Lücken in $\mathbb{Q}$: Es gibt Dedekindsche Schnitte (L, R) in $\mathbb{Q}$, deren linker Teil L kein Supremum und deren rechter Teil R kein Infimum besitzt. Es ist bemerkenswert, dass Cantors Charakterisierungssatz auch dazu geeignet ist, die Existenz von Lücken in $\mathbb{Q}$ nachzuweisen, und dies ohne jede Arithmetik:

Ordnungstheoretischer Beweis der Existenz irrationaler Zahlen

Wir betrachten die Ordnung $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}_0 + \mathbb{Q}_1$, die aus zwei hintereinander gehängten Kopien von $\mathbb{Q}$ besteht.

Formal sei $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \times \{ 0 \}$, $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \times \{ 1 \}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}_0 \cup \mathbb{Q}_1$ und es sei $(q, i) < (r, j)$ in $\mathbb{Q}^*$, falls $i < j$ *oder* $i = j$ und $q < r$ in $\mathbb{Q}$.

Die Ordnung $\mathbb{Q}^*$ hat offenbar die Lücke $(\mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_1)$. Aber $\mathbb{Q}^*$ erfüllt die drei Bedingungen des Cantorschen Satzes, ist also isomorph zu $\mathbb{Q}$. Damit hat auch $\mathbb{Q}$ Lücken.

Cantors Charakterisierung liefert neue ordnungstheoretische Beweise sowohl für die Existenz irrationaler Zahlen als auch für die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. Damit beleuchtet er zwei fundamentale und geschichtlich weit auseinanderliegende Erkenntnisse über das Linearkontinuum noch einmal von einer ganz eigenen Warte.

6. Zur Bedeutung des Ergebnisses

Die Entdeckung der Überabzählbarkeit wirft die Frage auf, wieviele reelle Zahlen es nun gebe. Die Cantorsche Kontinuumshypothese von 1878 gibt die folgende Antwort (siehe [Cantor 1878, S. 257f]):

Kontinuumshypothese

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar, so existiert eine Bijektion zwischen A und $\mathbb{R}$.

Anders formuliert besagt die Hypothese: Die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ ist die kleinste Unendlichkeitsstufe nach der durch die Menge $\mathbb{N}$ repräsentierten abzählbaren unendlichen Mächtigkeit. Oder kurz: Es gibt keine Mächtigkeit zwischen den natürlichen und den reellen Zahlen.

Die Kontinuumshypothese ist nun aber im Rahmen der klassischen Mathematik nachweislich weder beweisbar noch widerlegbar, es sei denn, die klassische Mathematik ist selbst widersprüchlich.

Unter der „klassischen Mathematik“ verstehen wir informal das System der heute üblichen mathematischen Begriffsbildung und Argumentation. Genauer können wir „beweisbar in der klassischen Mathematik“ lesen als „beweisbar in der Axiomatik von Zermelo-Fraenkel mit Auswahlaxiom“. Weiter kann „beweisbar“ durch „formal herleitbar in einem syntaktischen logischen Kalkül“ präzisiert werden.

Das metamathematische Ergebnis der *Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese* haben Kurt Gödel 1938 und Paul Cohen 1963 bewiesen. Die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen hat insgesamt zur Analyse der Fundamente der Mathematik und zur Entwicklung von allgemeinen Methoden der mathematischen Logik geführt, die derartige limitierende Resultate überhaupt ermöglichen. Das Ergebnis selbst zeigt, dass wir die so vertraut erscheinenden reellen Zahlen in einer fundamentalen Art und Weise nicht verstehen. Wie diese Verständnislücke zu interpretieren ist und ob und wie sie ausgefüllt werden könnte, ist nach wie vor Gegenstand der Diskussion.

Eine ganz andere praktische Bedeutung hat das Phänomen der Überabzählbarkeit in der Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie: Die Existenz eines abzählbar-additiven Maßes λ auf einer Menge M mit $\lambda(M) > 0$, das einzelnen Punkten das Maß 0 zuordnet, ist nur möglich, wenn M überabzählbar ist, denn sonst wäre

$$\lambda(M) = \sum_{x \in M} \lambda(\{x\}) = 0.$$

Die Längenmessung λ auf $\mathbb{R}$ erfüllt aber sicherlich $\lambda(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Integrationstheorie mit starken Vertauschungssätzen beruht auf einer abzählbar-additiven Längenmessung und damit notwendig auf einer überabzählbaren Struktur.

Diese beiden weit voneinander entfernt liegenden Gesichtspunkte zeigen, wie sehr sich sowohl Cantor als auch Dedekind in ihrer spontanen Einschätzung der Bedeutung der Cantorschen Frage nach der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ geirrt haben.

Literatur

Baire, René 1899 *Sur les fonctions de variables réelles.* Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. IIIa 3 (1899), S. 1 – 123. Auch in: Œuvres Scientifiques. Gauthier-Villars, Paris 1990, S. 49 – 173.

Bois-Reymond, Paul du 1875 *Über asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen.* Mathematische Annalen 8 (1875), S. 363 – 414.

Cantor, Georg 1872 *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.* Mathematische Annalen 5 (1872), S. 123 – 132.

– 1874 *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 77 (1874), S. 258 – 262.

– 1878 *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 84 (1878), S. 242 – 258.

– 1879 – 84 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 1 – 6.* Mathematische Annalen: 15 (1879), S. 1 – 7; 17 (1880), S. 355 – 358; 20 (1882), S. 113 – 121; 21 (1883), S. 51 – 58; 21 (1883), S. 545 – 591; 23 (1884), S. 453 – 488.

– 1892 *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Erster Band. 1890 – 91. 1 (1892), S. 75 – 78.

– 1895 – 1897 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. 1 – 2.* Mathematische Annalen: 46 (1895), S. 481 – 512; 49 (1897), S. 207 – 246.

– 1932 *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Hrsg. Ernst Zermelo. Springer, Berlin.

– 1991 *Briefe.* Hrsg. Herbert Meschkowski, Winfried Nilson. Springer, Berlin.

Cantor, Georg / Dedekind, Richard 1937 *Briefwechsel Cantor – Dedekind.* Hrsg. E. Noether, J. Cavaillès. Hermann, Paris.

Christianidis, Jean (Hrsg.) 2004 *Classics in the History of Greek Mathematics.* Kluwer, Dordrecht.

Cohen, Paul 1963 *The independence of the continuum hypothesis. Part I.* Proceedings of the National Academy of Science USA 50 (1963), S. 1143 – 1148.

Dauben, Joseph Warren 1979 a *Georg Cantor's creation of transfinite set theory: personality and psychology in the history of mathematics.* Annals of the New York Academy of Sciences 321 (1979), S. 27 – 44.

– 1979 b *Georg Cantor – His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Harvard University Press, Cambridge, Mass. (Nachdruck 1990, Princeton University Press.).

Deiser, Oliver 2004 *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo.* 2. erweiterte Auflage. Springer, Berlin.

– 2007 *Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen.* Springer, Berlin.

Dieudonné, Jean 1985 *Grundzüge der modernen Analysis. Band I.* Dritte Auflage. Vieweg, Braunschweig.

Dugac, Pierre 1976 *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux textes inédits).* Vrin, Paris.

Ferreirós, José 1993 *On the relations between Georg Cantor and Richard Dedekind.* Historia Mathematica 20 (1993), S. 343 – 363.

– 1999 *Labyrinths of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics.* Birkhäuser, Basel.

Fraenkel, Abraham 1930 *Georg Cantor.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 39 (1930), S. 189 – 266.

Gödel, Kurt 1938 *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis.* Proceedings of the National Academy of Sciences USA 24 (1938), S. 556 – 557.

Grattan-Guinness, Ivor 1974 *The rediscovery of the Cantor-Dedekind correspondence.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 76 (1974), S. 104 – 139.

– 2000 *The Search for Mathematical Roots, 1870 – 1930. Logic, Set Theories and The Foundations of Mathematics from Cantor Through Russell to Gödel.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

Hallett, Michael 1984 *Cantorian set theory and limitation of size.* Clarendon Press, Oxford.

Kanamori, Akihiro 1996 *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen.* The Bulletin of Symbolic Logic 2 (1996), S. 1 – 71.

Lebesgue, Henri 1905 *Sur les fonctions représentables analytiquement.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1 (1905), S. 139 – 216.

Liouville, Joseph 1851 *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques.* Journal de mathématiques pures et appliquées 16 (1851), S. 133 – 142.

Meschkowski, Herbert 1967 *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors.* Vieweg, Braunschweig.

Purkert, Walter / Ilgauds, Hans Joachim 1987 *Georg Cantor 1845 – 1918*. Birkhäuser Verlag, Basel.

2. Der Multiplikationssatz der Mengenlehre

Wir diskutieren die Geschichte des Multiplikationssatzes der Mengenlehre, der die Frage nach der Mächtigkeit des kartesischen Produkts einer unendlichen Menge mit sich selbst beantwortet. Wir geben fünf verschiedene Beweise, von denen zwei allgemein zugänglich sind. Der Artikel ist getrennt in einen historischen und einen mathematischen Teil, die unabhängig voneinander lesbar sind.

A. Einleitung

A1. Einführung

Der Multiplikationssatz der Mengenlehre lautet:

Ist M eine unendliche Menge, so existiert eine Bijektion zwischen $M \times M$ und M.

Dieser Satz bedarf aufgrund seiner überzeugend schlichten Antwort auf ein sehr natürliches und zunächst schwieriges Problem keinerlei Werbemaßnahmen, jedoch ist das Interesse, das dem Satz zukommt, vielgestaltig: Von der mengentheoretischen Sternwarte aus ist der Satz Teil des Ergebnisses, dass alle kanonischen arithmetischen Operationen mit Mächtigkeiten letztendlich trivial sind mit Ausnahme der Exponentiation, deren Natur dafür um so schwerer zu ergründen ist. Geschichtlich trug der Spezialfall des Satzes für die reellen Zahlen – die Existenz einer Bijektion zwischen der Ebene und der Geraden –, viel zur Fundierung der Analysis bei, die sich gegen Ende des 19. und zu Anfang des 20. Jahrhunderts vollzog. Weiter spiegelt die sich über drei Jahrzehnte erstreckende Geschichte des allgemeinen Satzes den gesellschaftlichen Wachstum einer Theorie wider, die aus einer schöpferischen Einzelleistung hervorging, und dann etwas frühreif als blue chip der mathematischen Börse dastand und ihren Crash auslöste. Was für die gesamte Mengenlehre gilt, gilt hier speziell für ein einzelnes Resultat: Georg Cantor geht den Weg zunächst ganz alleine, und lässt dabei genügend Raum für seine Epigonen übrig, seine Ideen nicht nur weiterzuentwickeln, sondern für sich neu zu ordnen und zu interpretieren. Seine schwindende mathematische Kraft gegen Ende des 19. Jahrhunderts markiert eine Unstetigkeitsstelle in der Entwicklung des Gebiets, die Tradierung seiner Intuition und seines Wissens gelingt nur bruchstückhaft. Seine Einsichten etwa über die Paradoxien der „absolut unendlichen Vielheiten", der „großen" echten Klassen im Gegensatz zu den „kleinen" Mengen sind heute nur brieflichen Spuren folgend zu rekonstruieren. Dass Cantor einen Beweis des Multiplikationssatzes gesehen hat, ist nicht einmal handschriftlich dokumentiert, sondern nur einer Bemerkung von Felix Bernstein in seiner Dissertation von 1901 zu entnehmen, die dann einige Jahre lang in nebelhafter Weise verwendet wird.

Im Jahre 1905 veröffentlicht ein bis heute obskurer Herr A. E. Harward, angeregt durch nichts als Russells „Principles of Mathematics" und zwei nicht gerade glänzende Artikel von Philip Jourdain in einem philosophischen Journal einen ersten vollständigen Beweis, der von der Mathematikergilde nicht wahrgenommen wird. Harward war Verwaltungsangestellter in Indien, und gibt der ganzen Geschichte eine kuriose und exotische Note. Er skizziert im Anhang seiner Arbeit noch einen zweiten Beweis, den Hausdorff erst 1914 wiederentdecken wird, und der im Wesentlichen den heute üblichen darstellt. Innerhalb der professionellen Mathematik gelingt Gerhard Hessenberg unabhängig von Harward ungefähr zeitgleich ein weiterer Beweis, der 1906 in seinem Lehrbuch „Grundbegriffe der Mengenlehre" erscheint, und seither als erster Beweis des Satzes zitiert wird.

Ein wichtiger Satz der Mengenlehre, der zudem mit dem heute zentralen Begriff der Regularität von Kardinalzahlen in enger Beziehung steht, blieb durch einen mathematischen Generationenwechsel, gepaart mit der Nichtbeachtung eines Außenseiters, an der Jourdain nicht unschuldig ist, schätzungsweise ein ganzes Jahrzehnt verdeckt. Das Unglück der frühen Mengenlehre ist die mangelnde Zentrumsbildung um Cantor in den 80er und 90er Jahren, ihr Glück die Wiederaufnahme seiner Ideen in zwei völlig verschiedenen Richtungen durch Ernst Zermelo und Felix Hausdorff nach dem Jahrhundertwechsel, die in eine Zeit des allgemeinen Interesses an mathematischen Grundlagenfragen fiel.

Wir diskutieren die Geschichte des Satzes ausführlich in Abschnitt B. Nach diesem historischen Dokumentarfilm (ohne Werbeunterbrechung) betrachten wir zunächst den mathematischen Spezialfall des Satzes für die reellen Zahlen, und geben dann fünf verschiedene Beweise des allgemeinen Resultates. Die Beweise sind hier weder historisch noch nach ihrer Schwierigkeit geordnet, sondern nach der Menge an Mathematik, die in ihnen Verwendung findet. Beweis I braucht nur das Zornsche Lemma. Beweis II ist der heute allgemein übliche à la Harward-Jourdain-Hausdorff, allerdings so zugerichtet, dass der Leser nur den Wohlordnungsbegriff, aber keine Ordinalzahlen zu kennen braucht. Als Intermezzo beweisen wir dann die markante Äquivalenz von Multiplikationssatz und Auswahlaxiom, die im Dreisprung durch Sätze von Felix Bernstein, Friedrich Hartogs und Alfred Tarski zwischen 1901 und 1924 erreicht wurde. Danach versuchen wir mit Beweis III Wiederbelebungsmaßnahmen für den ersten Beweis von Gerhard Hessenberg. Auch Beweis IV stammt aus der Feder von Hessenberg, und bringt als Satyrspiel gegen Ende des Abends noch einmal neuen Witz ins Geschehen. Die Hessenbergschen Beweise beruhen auf der Arithmetik transfiniter Zahlen, sind modulo dieser Arithmetik dann aber trickreich konstruierte kurzweilige Einakter. Der Leser findet diese Beweise von Hessenberg in moderner und vereinfachter Form in den Abschnitten C 5 und C 6, die sich mehr an Spezialisten und Liebhaber richten. Gleiches gilt für Abschnitt C 7, ein Anhang, der mit Beweis V den ersten Beweis von A. E. Harward diskutiert, wenngleich dem Argument wohl in erster Linie nur geschichtliches Interesse zukommen dürfte. Ansonsten ist dieser Essay für jeden Mathematiker zugänglich, und soll all denen entgegen kommen, die an einem vollständigen und transparenten Beweis des Satzes und seiner historischen Position Interesse haben.

Nichts in diesem Artikel ist wirklich neu, doch finden sich der erste, dritte und vierte Beweis des Satzes wenn überhaupt dann verstreut unter anderen mengentheoretischen Sachverhalten. Zudem wird A. E. Harward an keiner einschlägigen Stelle im Zusammenhang mit dem „Satz von Hessenberg" auch nur erwähnt. Insgesamt erschien dem Autor eine isolierte Darstellung des vielverzahnten Themas angebracht, und dies nicht nur aus historischem Interesse.

A2. Notationen und zentrale Sätze

Wir referieren in diesem Abschnitt die wichtigsten Bausteine der Mächtigkeitstheorie und der Theorie der Wohlordnungen. Das Bühnenbild ist das der klassischen Mathematik. Technisch gesprochen heißt das: Wir arbeiten in der üblichen Mengenlehre mit Auswahlaxiom. Die Verwendung des Auswahlaxioms ist für den behandelten Gegenstand von Bedeutung und wird daher jeweils notiert.

Stille Größe …

Sind M und N Mengen, so schreiben wir:

$|M| = |N|$, *falls* eine Bijektion von M auf N existiert

$|M| \leq |N|$, *falls* eine Injektion von M nach N existiert

$|M| < |N|$, *falls* $|M| \leq |N|$, aber $|M| \neq |N|$

Ist $|M| = |N|$, so nennen wir M und N *gleichmächtig*; ist $|M| < |N|$, so sagen wir, dass *die Mächtigkeit* von M *kleiner* ist als die Mächtigkeit von N. Dies ist die relationale Definition der Mächtigkeiten – wir haben nicht definiert, was „die Mächtigkeit von M" selbst ist, und brauchen dies auch nicht tun.

Eine Menge M heißt *(Dedekind-) unendlich*, falls es eine echte Teilmenge N von M gibt mit $|N| = |M|$. Äquivalent hierzu ist: Es gilt $|\mathbb{N}| \leq |M|$. (Diese Äquivalenz verwendet das Auswahlaxiom nicht. Es wird aber verwendet, um zu zeigen: M ist endlich *genau dann, wenn* es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|M| = |\{ 0, \ldots, n - 1 \}|$.)

Wir notieren nun offiziell das Thema dieses Artikels:

Satz *(Multiplikationssatz (Harward 1905, Hessenberg 1906))*

Ist M eine unendliche Menge, so ist $|M \times M| = |M|$.

Hessenberg beweist zugleich auch den verwandten *Additionssatz:* Die Vereinigung zweier disjunkter Kopien einer unendlichen Menge ist gleichmächtig zur Ausgangsmenge. Hierzu definieren wir für Mengen M und N:

$$M + N = M \times \{ 0 \} \cup N \times \{ 1 \}$$

Die Mengen $M' = M \times \{ 0 \}$ und $N' = N \times \{ 1 \}$ sind gleichmächtige „Kopien" von M bzw. N, und es gilt $M' \cap N' = \emptyset$. Wir schreiben dann den Additionssatz wie folgt:

Satz *(Additionssatz)*

Ist M eine unendliche Menge, so ist $|M + M| = |M|$.

Für die Argumente in den Beweisen I, III, IV und V ist der Additionssatz ein fahrplanmäßiger Halt auf der Beweisstrecke. Beweis II zeigt den Multiplikationssatz direkt, und der Additionssatz ergibt sich dann als Korollar mit Hilfe des folgenden Satzes, der pausenlos im Einsatz ist:

Satz *(Satz von Cantor-Bernstein; Cantor 1883, Dedekind 1887, Bernstein 1897)*

Seien M, N Mengen mit $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$. Dann gilt $|M| = |N|$.

Cantor hat diesen Sachverhalt 1883 formuliert und einen Beweis angekündigt. Aber erst Felix Bernstein konnte den Satz 1897 in einem von Cantor veranstalteten Seminar in Halle vollständig beweisen. Dedekind hatte bereits 1887 einen Beweis entdeckt, der sich heute in seinem Nachlass findet. Für den Beweis des Satzes muss das Auswahlaxiom nicht verwendet werden.

Offenbar gilt $|M| \leq |M + M| \leq |M \times M|$ für Mengen M mit mindestens zwei Elementen, und daher folgt der Additionssatz aus dem Multiplikationssatz mit Hilfe von Cantor-Bernstein.

Wesentliches Hilfsmittel für Beweis I ist das Zornsche Lemma:

Satz *(Zornsches Lemma; Zorn 1935)*

Ist P eine partiell geordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, so existiert ein maximales Element der Ordnung, d.h. ein $x \in P$ mit: Ist $y \in P$ und $x \leq y$, so ist $x = y$.

Das Zornsche Lemma ist geeignet, den recht filigranen Begriff der Wohlordnung aus bestimmten Argumenten zu vertreiben, und ist auch zu dieser zuweilen etwas grobschlächtigen Anwendung ins Leben gerufen worden: Zorn gab 1935 das Lemma als Prinzip ohne Beweis an. Das Zornsche Lemma ist ein einfaches Korollar des Hausdorffschen Maximalitätsprinzips [Hausdorff, 1914]. Aufgrund seiner einfachen Handhabung wurde es zum Exportschlager.

Das Zornsche Lemma ist, auf der Basis der anderen Axiome der Mengenlehre, äquivalent zum Auswahlaxiom. Gleiches gilt für den folgenden Satz:

Satz *(Vergleichbarkeitssatz; Cantor 1878, Zermelo 1904)*

Seien M, N Mengen. Dann gilt $|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$.

Beweis

Ohne Einschränkung sind M, N nichtleer. Sei P die Menge aller Injektionen $f : M' \to N$ mit $M' \subseteq M$, geordnet durch Inklusion, d.h.

$$f \leq g, \quad \textit{falls} \quad f \subseteq g \quad \text{(g setzt f fort)}$$

Das Zornsche Lemma findet Anwendung. Sei also $f \in P$ maximal. Dann ist $f : M \to N$ injektiv oder $f^{-1} : N \to M$ injektiv.

Der Vergleichbarkeitssatz wurde von Cantor zunächst als „offensichtlich" angesehen (vgl. den ersten Absatz von [Cantor 1878]), später hat er den Satz dann als Problem formuliert [Cantor 1895, Ende § 2] und bewiesen, aus heutiger Sicht jedoch nicht in vollständiger Strenge. Erst der Zermelosche Wohlordnungssatz von 1904 lieferte einen lückenlosen Beweis. Die Äquivalenz zum Auswahlaxiom (und damit zum Zornschen Lemma) hat Friedrich Hartogs gezeigt [Hartogs 1915].

… und edle Ordnung

Eine totale Ordnung $\langle W, < \rangle$ ist eine *Wohlordnung*, falls jede nichtleere Teilmenge von W ein <-kleinstes Element besitzt. $X \subseteq W$ ist ein *(echtes) Anfangsstück* von W, falls ein $b \in W$ existiert mit $X = \{ a \in W \mid a < b \}$. Wir schreiben im Folgenden oftmals nur W für eine Wohlordnung $\langle W, < \rangle$. Eine die Menge W wohlordnende Relation $< \subseteq W \times W$ ist dann stillschweigend mit dabei.

Zwei Wohlordnungen W_1 und W_2 sind *ordnungsisomorph* oder *gleichlang*, falls eine Bijektion $f : W_1 \to W_2$ existiert, sodass für alle $a, b \in W_1$ gilt: $a < b$ *genau dann, wenn* $f(a) < f(b)$. W_1 ist *(strikt) kürzer* als W_2, falls W_1 isomorph zu einem Anfangsstück von W_2 ist.

Ein Hauptmerkmal von Wohlordnungen ist die Vergleichbarkeit ihrer Längen:

Satz *(Vergleichbarkeitssatz für Wohlordnungen; Cantor 1897)*

Seien W_1 und W_2 zwei Wohlordnungen. Dann tritt genau einer der drei folgenden Fälle ein:

(i) W_1 und W_2 sind gleichlang.

(ii) W_1 ist kürzer als W_2.

(iii) W_2 ist kürzer als W_1.

Insbesondere sind Wohlordnungen niemals gleichlang zu ihren eigenen Anfangsstücken.

Der Vergleichbarkeitssatz für Wohlordnungen ist ohne Auswahlaxiom beweisbar. Allgemein wird das Auswahlaxiom beim Jonglieren mit Wohlordnungen nie gebraucht, da man immer auf einen *kleinsten* Zeugen innerhalb irgendetwas Nichtverschwindendem zugreifen kann, anstatt nur auf *einen Zeugen*, was der Job einer Auswahlfunktion wäre. Lediglich um die nackte Existenz von Wohlordnungen zu sichern ist das Auswahlaxiom bitter nötig:

Satz *(Wohlordnungssatz; Zermelo 1904, zweiter Beweis 1908)*

Jede Menge lässt sich wohlordnen:

Ist M eine Menge, so existiert eine Wohlordnung < auf M.

Der Zermelosche Wohlordnungssatz ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Noch ein paar Worte zu Ordinalzahlen und Kardinalzahlen. In der Mengenlehre definiert man *Ordnungstypen* oder *Ordinalzahlen* nach Cantor informal als das allen Wohlordnungen gleicher Länge Gemeinsame, oder formal nach von Neumann und Zermelo als bestimmte natürliche und uniform definierbare Repräsentanten für Wohlordnungen – je ein Repräsentant pro Länge. Die *transfiniten Zahlen* sind dann in beiden Versionen einfach diejenigen Ordinalzahlen, die den unendlichen Wohlordnungen zugeordnet sind.

Man kann mit Wohlordnungen (und folglich mit Ordinalzahlen) arithmetisch operieren: Hintereinanderhängen zweier Ordnungen führt zur Summe, lexikographische Ordnung des kartesischen Produkts (oder iterierte Summation) führt zur Multiplikation, iterierte Multiplikation zur Exponentiation.

Ganz ähnlich kann man *Kardinalzahlen* informal als das allen Mengen gleicher Mächtigkeit Gemeinsame definieren. Eine formale Definition ist möglich, auch in einer Mengenlehre ohne Auswahlaxiom (mit einer nichttrivialen Konstruktion). *Alephs* sind nun diejenigen Kardinalzahlen, die zu den unendlichen wohlordenbaren Mengen gehören. Mit Hilfe des Wohlordnungssatzes sind alle Mengen gleichmächtig zu einer Wohlordnung, und die Alephs fallen dann mit den unendlichen Kardinalzahlen zusammen. In einer Mengenlehre ohne Auswahlaxiom bilden die Alephs eine Teilklasse der unendlichen Kardinalzahlen, und bzgl. der Vergleichbarkeit von Kardinalzahlen kann dann nur noch für die Alephs Garantie übernommen werden.

Mit Kardinalzahlen können wir ebenfalls rechnen, die Operationen sind hier über die Mächtigkeiten von Summe, kartesischem Produkt und, für die Exponentiation, der Menge aller Funktionen von einer Menge der Mächtigkeit des Exponenten in eine Menge der Mächtigkeit der Basis definiert.

Diese knappen Bemerkungen genügen hoffentlich, weite Strecken des folgenden historischen Teils für jeden Leser zugänglich zu machen.

B. Historischer Teil

B1. Abriss der Geschichte des Multiplikationssatzes

Georg Cantor hat das Konzept der Mächtigkeit von unendlichen Mengen in den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts entwickelt und untersucht. Zu dieser Zeit bewies er auch den Multiplikationssatz für abzählbare Mengen und für Mengen der Mächtigkeit der reellen Zahlen. Der erste Beweis des allgemeinen Satzes erschien 1905 in einer furiosen, aber kaum bekannten Arbeit von A. E. Harward, „Indian Civil Servant in Calcutta“. Unabhängig hiervon erschien 1906 Hessenbergs erster Beweis. Ein Jahr später veröffentlichte Hessenberg einen zweiten Beweis des Satzes, seiner Natur nach wie der erste arithmetisch, aber von ihm doch wesentlich verschieden. Ein dritter Beweis wurde 1908 von Philip Jourdain geführt, und eine Vereinfachung dieses Beweises, die sich ebenfalls schon bei Harward 1905 findet, fand dann Eingang in das Buch von Felix Hausdorff von 1914, und dadurch weite Verbreitung. Auch der heute übliche Beweis folgt der Harward-Hausdorffschen „zweidimensionalen Argumentationslinie“, die als direkteste Verallgemeinerung der Cantorschen Diagonalaufzählung von $\mathbb{N}^2$ angesehen werden kann. Hessenbergs Beweise dagegen sind in Vergessenheit geraten – sicher zu unrecht, zumal besonders Hessenbergs erster Beweis direkt auf Cantors Arbeiten aufbaut, und dadurch noch den unverwechselbaren Glanz der erwachenden Mengenlehre an sich trägt. Schließlich gab Max Zorn 1944 noch einmal einen ganz anderen Beweis mit Hilfe des Zornschen Lemmas, der Wohlordnungen ganz vermeidet. Auch dieser Beweis ist heute großflächig vergessen.

Wir diskutieren nun die Geschichte des Satzes genauer. Der Leser, der sich nur für die mathematischen Aspekte des Satzes interessiert, kann direkt mit Teil C fortfahren. Die anderen Leser, die die Geschichte hören wollen, aber keinen speziellen Vertrag mit der Mengenlehre geschlossen haben, können im Folgenden das Kleingedruckte überspringen – mit Ausnahme vielleicht der Originalzitate.

B2. Cantors Paarungsfunktion und die Mächtigkeit der Ebene (1878)

In einem Brief an Richard Dedekind vom 29. 11. 1873 stellt Cantor die Frage, ob sich die natürlichen Zahlen bijektiv auf die reellen Zahlen abbilden lassen. Er bemerkt, dass sich eine Bijektion zwischen den natürlichen Zahlen und den (positiven) rationalen Zahlen leicht angeben lässt. Die Identität $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ war ihm zu diesem Zeitpunkt bereits völlig klar. Wenige Tage später kann Cantor die von ihm gestellte Frage selbst beantworten. In der 1874 erschienenen Arbeit „Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" zeigt Cantor der mathematischen Welt die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen und die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. Die Arbeit ist von Cantor mit „Berlin, den 23. Dezember 1873" unterzeichnet, doch was hier als hübsch verpacktes Weihnachtsgeschenk für die Kollegen daherkommt, entpuppt sich schnell als Startschuss für eine aufregende Epoche des fundamental Neuen und der neuen Fundamente. Insbesondere fließt aus Cantors Ergebnis so ganz nebenbei die Existenz transzendenter Zahlen, ein großes Ergebnis von Liouville aus dem Jahre 1847.

In „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" von 1878 gibt Cantor, eher beiläufig, die bekannte Diagonalaufzählung von $\mathbb{N}^2$ konkret an: Das einfache Polynom zweiten Grades

$$f(n, m) = m + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

bildet die Menge aller Paare von natürlichen Zahlen bijektiv auf natürlichen Zahlen ab – und ist als Polynom zweiten Grades in dieser Hinsicht einzigartig. Das Hauptresultat der Arbeit von 1878 ist jedoch, dass $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$ gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Das Problem hatte Cantor bereits Jahre früher in einem Brief an Dedekind vom 5. 1. 1874 aufgeworfen. In dem Brief heißt es:

Cantor an Dedekind (5. 1. 1874): „Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpuncte) eindeutig beziehen, so dass jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?

Mir will es Augenblick noch scheinen, dass die Beantwortung dieser Fragen, – obgleich man auch hier zum *Nein* sich so gedrängt sieht, dass man den Beweis dazu fast für überflüssig halten möchte, – grosse Schwierigkeiten hat. –"

(Diese und die weiteren zitierten Briefstellen finden sich in [Cantor 1991].)

Die Lösung ließ diesmal nicht Tage, sondern Jahre auf sich warten. Cantor teilte einen Beweis seines kontraintuitiven Resultates Dedekind brieflich am 20.6.1877 mit – in der Tat ist die Frage mit einem *Ja* zu beantworten. Er verwendet das „Reissverschlussverfahren“, um zwei reelle Zahlen des Einheitsintervalls, die in unendlicher Dezimaldarstellung vorliegen, zu einer neuen reellen Zahl zu verschmelzen: Die Nachkommastellen der beiden Zahlen werden abwechselnd aneinandergereiht, aus 0,1223… und 0,9267… wird etwa 0,19222637… Dedekind antwortet ihm, dass die entstehende Abbildung nicht surjektiv ist – Cantors Beweis zeigt nur $|\mathbb{R}^2| \leq |\mathbb{R}|$. Die Zahl 0,11101010… etwa liegt nicht im Bild der Funktion. Cantor bemerkt, dass dieser Einwand nicht das Herz der Sache träfe: Sein Beweis liefert eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}^2$ und einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, und das scheint ja irgendwie noch mehr zu sein, als er wollte. Dennoch sucht er nach einem Beweis von $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$. Der Satz von Cantor-Bernstein stand ihm damals noch nicht zur Verfügung, und Cantor verwickelt sich in unangenehme technische Probleme. Die gewünschte Bijektion wird sehr aufwendig konstruiert, an die Stelle der Dezimalbruchentwicklungen treten Kettenbrüche, und Cantor argumentiert umständlich, dass die irrationalen Zahlen gleichmächtig zu den reellen Zahlen sind. Und obwohl er schließlich ein einfaches Argument hierfür sieht und auch angibt [Cantor 1878, § 6], will er in der Veröffentlichung auf seine kompliziertere Konstruktion nicht verzichten. Die Arbeit ist, ganz abgesehen von dem überraschenden Resultat, in vielerlei Hinsicht interessant: Sie ist Photographie des Nebels, der über neuen Begriffen in ihren Morgenstunden liegt, und zugleich ein Dokument der Psyche von Wissenschaftlern, denen allzu einfache Lösungen oft gar nicht so gelegen kommen, da diese vorangehende Kraftakte überflüssig machen und darüber hinaus auch nicht geeignet sind, der Mitwelt das eigene geistige Potential zu offenbaren.

Die Gleichmächtigkeit der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Geraden $\mathbb{R}$ war für die damalige Zeit eine große Überraschung, wobei schon die Fragestellung an sich ungewöhnlich genug erschien. Cantor schreibt hierzu in einem Brief an Dedekind vom 25.6.1877:

Cantor an Dedekind (25. 6. 1877): „Die meisten, welchen ich diese Frage [nach der Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}$] vorgelegt, wunderten sich sehr darüber, dass ich sie habe stellen können, da es *sich ja von selbst verstünde*, dass zur Bestimmung eines Punctes in einer Ausgedehntheit von ρ Dimensionen immer ρ unabhängige Coordinaten gebraucht werden. Wer jedoch in den Sinn der Frage eindrang musste bekennen, dass es mindestens eines Beweises bedürfe, warum sie mit dem ‚selbstverständlichen‘ *nein* zu beantworten sei. Wie gesagt gehörte ich selbst zu denen, welche es für das *Wahrscheinlichste* hielten, dass jene Frage mit einem Nein zu beantworten sei, – bis ich vor ganz kurzer Zeit durch ziemlich verwickelte Gedankenreihen zu der Überzeugung gelangte, dass jene Frage ohne all Einschränkung zu *bejahen* ist. Bald darauf fand ich den Beweis, welchen Sie heute vor sich sehen.“

Gemeint ist der „komplizierte“ Beweis von der Arbeit von 1978. Es gibt einen einfachen Beweis von $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ mit Hilfe einer modifizierten Reissverschlusstechnik, der den Satz von Cantor-Bernstein nicht benötigt und als Trick von Julius König bekannt ist. Cantor hat dieses einfache Argument übersehen. Die Idee ist, das Reissverschlussverfahren mit sog. Ziffernblöcken anstelle von einzelnen Ziffern durchzuführen; ist $a \neq 0$ eine Ziffer einer reellen Zahl in unendlicher Dezimaldarstellung, so bildet a zusammen mit allen vorangehenden Nullen einen Block der Zahl, der dann also die Form 00…0a hat. Die ersten Blöcke von 0,102002304… sind 1, 02, 002, 3, 04. Werden nun je zwei reelle Zahlen des offenen Einheitsintervalls I durch Verzahnung von Blöcken anstatt von Einzelziffern amalgamiert, so entsteht eine bijektive Abbildung von $I \times I$ nach I (vgl. C1).

Die erste dem Autor bekannte Referenz auf die Beobachtung von König ist [Schoenflies 1900, p. 23]. Dort heißt es: „… und zweitens denke man sich die eventuellen Nullen mit der ersten auf sie folgenden Ziffer [ungleich 0] zu je einer Gruppe verbunden, und dehne das Abbildungsgesetz [das Reissverschlussverfahren] auf diese Zahlengruppen aus[1).] “ Die Anmerkung 1 hierzu ist dann: „1) Dieser Gedanke rührt von J. König her.“ Auch in [Fraenkel 1928] – vielfach ein historisches Miniaturenmuseum – findet sich lediglich die Bemerkung: „Durch diesen von J. KÖNIG stammenden Kunstgriff wird also der vorstehende Beweis lückenlos.“ [eb., p. 100].

In seinen Antwortschreiben wies Dedekind auf die Unstetigkeit der konstruierten Bijektionen hin, und warf damit neue Fragen auf. Giuseppe Peano gab 1890 eine stetige Surjektion von der Geraden auf die Ebene an. Die Frage, ob die Injektivität einer solchen Abbildung notwendig verletzt sein müsse, blieb offen. Erst 1911 gelang Brouwer der vollständige Beweis des Satzes, dass es keine stetigen Bijektionen zwischen verschiedendimensionalen Kontinua geben kann.

Aus heutiger Sicht – oder genauer seit Hausdorffs Untersuchung der allgemeinen Topologie 1914 [vgl. speziell hierzu Hausdorff 1914, p. 377f] – ist das Resultat für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ relativ einfach zu beweisen: Die Ebene bleibt nach Entfernung eines Punktes zusammenhängend, die Gerade wird dagegen durch Entfernung eines Punktes unzusammenhängend. Es folgt, dass es keine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ geben kann. Wegen automatischer Stetigkeit der Umkehrabbildung kann es dann weiter auch keine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ geben.

B3. Cantors Kalkül der Kardinalzahlarithmetik (1895)

Den nächsten größeren Fortschritt in der Geschichte des Problems bildet die Entdeckung des algebraischen Kalküls der Kardinalzahlarithmetik durch Cantor. Ein Beweis von $|\mathbb{R}|^2 = |\mathbb{R}|$ liest sich darin dann einfach so:

$$|\mathbb{R}|^2 = (2^{\aleph_0})^2 = 2^{2 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|.$$

Cantor führt den Kalkül im ersten Teil seiner „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ von 1895 ein, und notiert begeistert, dass sich die Beweise der Arbeit von 1878 nun auf „wenige Striche“ verkürzen. Der Kalkül selbst wurzelt in Cantors Entdeckung des Diagonalverfahrens für Abbildungen einer Menge M in die Menge $\{0, 1\}$. (Cantor trug das Diagonalverfahren auf der ersten Jahrestagung der DMV 1891 vor.) Solche 0-1-Belegungen suggerieren eine Potenzierung für Kardinalzahlen, etwa $2^{|M|}$, und die vertrauten und leicht zu beweisenden Rechengesetze, wie etwa $(2^{|M|})^{|N|} = 2^{|M| \cdot |N|}$ liefern nützliche, zuvor nur durch mühsame Manipulation von Bijektionen zu gewinnende Ergebnisse. Entscheidend ist zudem die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}$ und $\{ f \mid f : \mathbb{N} \to \{ 0, 1 \} \}$, die die Brücke zwischen $|\mathbb{R}|$ und $2^{\aleph_0}$ schlägt.

B4. Zermelo über die Addition von Kardinalzahlen (1901)

Zermelo widmet seine erste mengentheoretische Arbeit der Untersuchung der Addition von unendlichen Kardinalzahlen. Er zeigt (hier in kardinalzahlfreier Notation wiedergegeben): Gilt $|M| = |M + N_n|$ für Mengen M, N_n, $n \in \mathbb{N}$, so gilt $|M| = |M + \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n|$. Hieraus folgt: Gilt $|M| = |M + N|$ für zwei Mengen M und N, so gilt auch $|M| = |M + (\mathbb{N} \times N)|$. Die Argumentation erweist sich interessanterweise als eine Verallgemeinerung des Bernsteinschen Beweises des Satzes von Cantor-Bernstein, und dieser Punkt scheint ein Hauptanliegen von Zermelo gewesen zu sein. Eine allgemeine Additions- oder Multiplikationshypothese stellt Zermelo in seinem Artikel nicht auf, und auch ein Additions- oder Multipliaktionssatz für wohlordenbare Mengen wird nicht diskutiert.

Zermelo spielt in der Geschichte des Satzes noch in zweierlei Hinsicht eine Rolle: Zum einen beweist er 1904 den Wohlordnungssatz, der den Multiplikationssatz auf das Problem reduziert, $|M^2| = |M|$ für wohlgeordnete Mengen M zu beweisen. Alle Beweise mit Ausnahme des Beweises von Zorn folgen dieser Reduktionsmöglichkeit. Für den Beweis von $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$ durch diagonale Aufzählung ist die Ordnung von $\mathbb{N}$ wesentlich, und ebenso hilft eine einer unendlichen Menge M zugrundeliegende Wohlordnung für einen Beweis von $|M^2| = |M|$. Zum anderen hat Zermelo die Lückenhaftigkeit der Argumentation einer frühen Arbeit von Jourdain betont [Jourdain 1904b], in der Jourdain zumindest den Spezialfall des Multiplikationssatzes für Mengen der kleinsten überabzählbaren Mächtigkeit beweisen wollte, also die Identität $\aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$. In seiner Arbeit von 1908 weist Jourdain auf Zermelos berechtigte frühere Kritik hin, und dankt ihm weiter für kritische Kommentare zur vorliegenden Arbeit: „I must here refer gratefully to the trouble which Prof. Zermelo has taken in repeatedly critisising weak points in my proofs and suggesting improvements.“ [Jourdain 1908, p. 512]. Zermelo brachte also dem Problem kontinuierliches lebhaftes Interesse entgegen, und er unterstützte in seiner bekannten kritischen Art Jourdain auf seinem langen und holprigen Weg zu einem korrekten Beweis.

Ein dritter Punkt betreffend Zermelos Anteil und Teilnahme am Multiplikationsproblem ist die Ankündigung, dass Zermelo einen andersartigen Beweis des Satzes gefunden habe und ihn demnächst veröffentlichen werde. Die Ankündigung findet sich im Buch von Hessenberg 1906 und wird in der Arbeit von Jourdain 1908 referiert, aber nicht weiter erläutert. Obwohl Zermelo also Jourdains Beweise zum Problem prüfte und kritisierte, scheint er ihm seinen eigenen Beweis nicht mitgeteilt zu haben. Wir kommen unten auf die Bemerkung bei Hessenberg noch kurz zurück.

B5. Die Hypothek der Dissertation von Bernstein (1901)

Zur Multiplikation noch größerer Mengen als der Menge der reellen Zahlen hat Cantor nichts veröffentlicht und auch in seinen Briefen äußert er sich hierzu nicht. Aus seinem algebraischen Kalkül folgen aber unmittelbar Ergebnisse wie

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})^2| \;=\; |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$$

Damit gilt der Multiplikationssatz auch für die Menge aller reellen Funktionen, also für $F = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$.

Nach Aussagen von Felix Bernstein hat Cantor aber einen Beweis des Multiplikationssatzes für wohlordenbare Mengen gesehen, und ihm diesen mündlich mitgeteilt. In seiner Dissertation von 1901 verwendet Bernstein den Multiplikationssatz für wohlordenbare Mengen als Hilfssatz, und schreibt zum Beweis lakonisch:

Bernstein (1905): „Den Beweis des Satzes, den ich aus mündlicher Mitteilung von G. Cantor kenne, führt man analog wie im einfachsten Falle … [für $\mathbb{N}$] durch Verwandlung *einer Doppelreihe in eine einfache Reihe* [d.h. man verwandelt eine doppelt indizierte Folge in eine gewöhnliche Folge] …“ [Bernstein 1905, §12].

Die Dissertation von Bernstein wurde 1905 in den Mathematischen Annalen veröffentlicht, als eine „bis auf einige Verbesserungen und Bemerkungen … unveränderte Wiedergabe [der Dissertation]“. Zitiert wird hier nach dieser leichter zugänglichen Arbeit.

Bernstein belässt es also in seiner Doktorarbeit bei einem Autoritätsargument, anstatt den Cantorschen Beweis durchzuführen. Es ist gut vorstellbar, dass der junge Bernstein das von Cantor wahrscheinlich nur skizzierte Argument in schweigender Bewunderung zur Kenntnis genommen hatte und es später nicht genau rekonstruieren konnte: Die Details einer Aufzählung von $M \times M$ bei „wohlgeordneten Achsen“ sind nicht ganz trivial, „diagonal“ im einfachen Sinne wie für $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kann man sie nicht so ohne Weiteres durchführen. Bemerkenswerterweise hat nun ein strenger Beweis des Multiplikationssatzes für Wohlordnungen durch eine Art Diagonalaufzählung bis zur Arbeit von Jourdain 1908 auf sich warten lassen, obwohl für einen solchen Beweis der Zermelosche Wohlordnungssatz nicht gebraucht wird, und obwohl die Beweisstrategie durch Bernsteins Bemerkung vorgezeichnet war. Hessenbergs Beweise von 1906 und 1907 kann man nicht als eine direkte Verallgemeinerung der Diagonalaufzählung von $\mathbb{N}^2$ ansehen. Und auch Jourdains Beweis verschleiert die Dinge noch unnötig, erst die Konstruktion von Hausdorff 1914 machte den Weg frei für die aus heutiger Sicht auf der Straße liegende Verallgemeinung der Cantorschen Paarungsfunktion auf kartesische Produkte mit Achsen beliebiger Länge (vgl. die Paarungsfunktion in C3).

Arthur Schoenflies schreibt im zweiten Teil seines Berichts über den Stand der Mengenlehre 1908:

Schoenflies (1908): „Es liegt zunächst nahe den Beweis [des Multiplikationssatzes für Wohlordnungen] in ähnlicher Wiese zu führen wie den [Cantorschen Beweis von $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ durch Diagonalaufzählung]… Doch bedarf der Begriff der diagonalen Anordnung [für allgemeine Wohlordnungen] … einer präzisen Erläuterung[1)] … [Fußnote 1):] In obiger Form erscheint der Beweis z. B. in Bernsteins Dissertation… Eine ausführliche Darstellung des Beweises liegt nicht vor.“ [Schoenflies 1908, p. 13]

Der Bericht von Schoenflies ist mit „Königsberg i. Pr., im Oktober 1907“ unterzeichnet.

Der Multiplikationssatz für beliebige Mengen spielt weiter in der Bernsteinschen Dissertation eine wichtige Rolle als eine Voraussetzung, aus der sich Vergleichbarkeitsresultate gewinnen lassen. Bernstein zeigt: Gilt für ein unter Addition abgeschlossenes System S von Mengen der Multiplikationssatz, d.h. die Aussage $|M^2| = |M|$ für alle $M \in S$, so sind die Elemente des Systems bzgl. ihrer Mächtigkeit vergleichbar, d.h. es gilt $|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$ für alle Elemente M und N von S [Bernstein 1905, § 4]. Bernstein verwendet im Beweis implizit das Auswahlaxiom. Dennoch bildet sein trickreiches Argument dann das Herzstück im Beweis des Satzes von Bernstein-Tarski [Tarski 1924], dass nämlich der Multiplikationssatz das Auswahlaxiom impliziert (vgl. hierzu B 12 und C4).

B6. Die Hausdorff-Formel und eine Regularitätsbehauptung (1904)

Im Zusammenhang mit Bernsteins Rückgriff auf einen mündlichen Beweis des Multiplikationssatzes für Wohlordnungen ist weiter die erste mengentheoretische Arbeit von Felix Hausdorff „Der Potenzbegriff in der Mengenlehre“ aus dem Jahr 1904 interessant. In dieser skizzenhaften Arbeit mit dem Untertitel „aus dem Sprechsaal“ behauptet Hausdorff die sog. Regularität von Nachfolger-Alephs. Diese Behauptung ist, wie schnell zu zeigen ist, mit dem Multiplikationssatz für Wohlordnungen gleichwertig. (Zum Beweis der Regularität muss zusätzlich zum Multiplikationssatz für Wohlordnungen auch das Auswahlaxiom verwendet werden.) Hausdorff braucht die Regularität zum Beweis seiner „Hausdorff-Formel“ der Kardinalzahlarithmetik. Sie stellt eine falsche Behauptung aus der Dissertation von Bernstein richtig, die ihrerseits zu dem falschen Beweis der Nichtwohlordenbarkeit des Kontinuums geführt hat, den Julius König 1904 auf dem Heidelberger Mathematikerkongress zur großen Aufregung seiner Hörer – unter ihnen Cantor – vortrug. Hausdorff scheint hier, wie Bernstein in seiner Dissertation, den Multiplikationssatz für Wohlordnungen aus dem Cantorschen Munde zu übernehmen.

Hausdorff reicht keinen vollständigen Beweis der Hausdorff-Formel, d.h. keinen Beweis der nur behaupteten Rgularität von Nachfolger-Alephs nach. In [Hausdorff 1908] gibt er ohne Beweis und ohne Referenz „die Alefgleichung $\aleph_\alpha{}^2 = \aleph_\alpha$“ als Begründung für die Regularität von $\aleph_{\alpha+1}$ an. In seinem Buch von 1914 wird die Regularitätsbehauptung dann unmittelbar nach einem ausführlichen Beweis der Alephgleichung – gleichwertig:

des Multiplikationssatzes für Wohlordnungen – bewiesen [Hausdorff 1914, p. 129]. Dort wird zudem in einer Anmerkung ausdrücklich Hessenberg als derjenige genannt, der den Multiplikationssatz 1906 zuerst bewiesen hatte. Hausdorffs eigene Arbeit von 1904 bleibt unerwähnt.

Im Jahr 1904 zeigt Zermelo den Wohlordnungssatz, und damit wird der Multiplikationssatz für Wohlordnungen (oder die Regularität von Nachfolger-Alephs) gleichwertig zum vollen Multipliaktionssatz für alle Mengen. Die nackt im Raum stehende Verallgemeinerung von Cantors Satz $|\mathbb{N}|^2 = |\mathbb{N}|$ auf alle wohlgeordneten unendlichen Mengen – und mit Zermelos starkem Resultat damit dann sogar auf alle unendlichen Mengen – sehnte sich nun in zunehmendem Maße nach einem richtigen mathematischen Gewand, einem lupenreinen Argument.

Bemerkenswert am Duo [Zermelo 1901] und [Hausdorff 1904] ist, dass elementare Fragen der Kardinalzahlarithmetik in den mengentheoretischen Erstlingen der beiden wichtigsten Erforscher der Mengenlehre nach Cantor eine zentrale Position einnehmen.

B7. Jourdains Versuch (1904) und Harwards Beweis (1905)

Jourdain hat in einer im „Philosophical Magazine“ 1904 veröffentlichten Arbeit versucht, den Multiplikationssatz für Wohlordnungen zu beweisen [Jourdain 1904b, p. 298 – 300]. Er beschreibt aber letztendlich das Problem nur, und beweist gar nichts (vgl. auch B4). A. E. Harward war es dann, ein mathematischer Außenseiter mit bislang unaufgelösten Initialen, der, von Indien aus agierend und auf der vergleichsweise recht dünnen Wissensgrundlage von Russells „Principles of Mathematics“ von 1903 und Jourdains Artikelpaar im „Philosophical Magazine“ von 1904 stehend, einen ersten vollständigen Beweis des Multiplikationssatzes für Wohlordnungen geben konnte. Harward verwendet den Wohlordnungssatz ähnlich wie Cantor als „Quasiaxiom“, und erhält so den vollen Multiplikationssatz.

Harwards Arbeit „On the transfinite numbers“ von 1905 ist eine klar geschriebene Einführung in eine informal-axiomatische Mengenlehre. Harward formuliert ein Ersetzungsaxiom, und begründet wie Cantor in seinen späten Briefen den Wohlordnungssatz durch Abzählen einer Menge entlang der Ordinalzahlen: Dieses muss irgendwann enden, da sonst die Menge gleichmächtig zur echten Klasse der Ordinalzahlen wäre. Weiter zeichnet sich die Arbeit durch eine große Sicherheit und Originalität in der Ordinalzahlarithmetik aus, und der Beweis des Multiplikationssatzes für Wohlordnungen beruht auf feinen arithmetischen Beobachtungen. Das Argument verwendet allerdings versteckt das Auswahlaxiom (vgl. C 7). Diese Schwäche lässt Harwards Beweis des Multipliaktionssatzes für Wohlordnungen aus heutiger Sicht zweitrangig erscheinen. Doch:

In einem Anhang, innerhalb einer Kritik des Arguments von [Jourdain 1904b], skizziert Harward noch einen zweiten Beweis, und schlägt hier genau die Aufzählung der Hälfte eines diagonal halbierten Quadrats über einer wohlgeordneten Achse vor, die Hausdorff 1914 als eine Vereinfachung der Jourdainschen Konstruktion von 1908 wiederentdecken wird. Harward schreibt über seine beiden Beweise im Anhang seiner Arbeit von 1905:

Harward (1905): „In order to complete the proof on the lines indicated by Mr. Jourdain, it is necessary that some rule or formula [analog zur Cantorschen Paarungsfunktion für $\mathbb{N}^2$] should be given by which the required correlation can be established once for all. As I could not succeed in constructing such a formula, I adopted a different method of proof [gemeint ist der im Hauptteil der Arbeit dargestellte Beweis].

I have recently discovered that by a slight modification of Mr. Jourdain's method a simple and rigorous proof can be obtained…" [Harward 1905, p. 458, „Note A" zu seinem Artikel]

Wir diskutieren die Konstruktion von Harward-Hausdorff in B 10. Harward unterscheidet allerdings zeittypisch nicht genau zwischen dem ungeordneten Paar $\{ \alpha, \beta \}$ und dem geordneten Paar (α, β), was aber der Sache und der klaren Skizze der Konstruktion und Beweisidee keinen Abbruch tut.

Es ergibt sich ein bemerkenswerter Zirkel: Jourdain, der Harwards Arbeit mit dem Autor diskutiert hat [vgl. Harward 1905, p. 439], kennt Harwards zweiten Beweis, stellt aber 1908 seinen eigenen endlich richtigen Beweis ins Rampenlicht, den Hausdorff 1914, ohne Kenntnis des Artikels von Harward, zum zweiten Harwardschen Beweis resimplifiziert! Jourdain hat in seinem Artikel von 1908 sehr unsauber auf Harwards Leistung hingewiesen, er diskutiert den Artikel zusammen mit Details seiner eigenen früheren Arbeiten, anstelle klar anzugeben, dass und wie Harward den Beweis vor ihm geführt hat.

Gregory H. Moore hat 1976 in einer Notiz auf die alleine schon aus rein axiomatischer Hinsicht bemerkenswerte Arbeit von Harward hingewiesen, und ihre Vernachlässigung als ein „establishment"-Phänomen interpretiert: „Harward [1905] contained the core of what could have been a worthwile axiomatization of set theory. Nevertheless, his paper provoked no public response, even from Jourdain who had suggested changes in it prior to publication. This silence was partly due to the fact that Harward was a self-confessed amateur vis-à-vis set theory …" [Moore 1976].

Auch nach Moores (nicht gerade an auffälliger Stelle veröffentlichtem) Hinweis blieb Harwards Beitrag zur Fundierung der Mathematik oder zum Multiplikationsproblem in (fast?) allen alten wie neueren mathematischen wie historischen Texten zur Mengenlehre vollkommen unbeachtet ([Deiser 2004] leider eingeschlossen, in guter Gesellschaft mit zum Beispiel [Hausdorff 2002, p. 33 und p. 597f]). Die folgende Geschichte des Satzes liest sich dann auch, als hätte es Harwards Artikel von 1905 gar nicht gegeben.

B8. Hessenbergs erster Beweis des Satzes (1906)

Unabhängig von Harward gelang Hessenberg ein Beweis des allgemeinen Additions- und Multiplikationssatzes durch ein einfaches, hübsches und heute fast vergessenes Argument, das die sogenannte Cantorsche Normalform [Cantor 1897, § 17] für Ordinalzahlen verwendet. Der Beweis erstreckt sich über die §§ 75 – 77 der „Grundbegriffe" [Hessenberg 1906].

Die Cantorsche Normalform ist, cum grano salis, die $\mathbb{N}$-adische Darstellung transfiniter Zahlen. Ganz so, wie sich natürliche Zahlen eindeutig in der Form

$$10^{n_1} \cdot a_1 \; + \; 10^{n_2} \cdot a_2 \; + \; \dots \; + \; 10^{n_k} \cdot a_k$$

schreiben lassen mit natürlichen Zahlen $n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 0$, $1 \leq a_i \leq 9$, lassen sich Ordinalzahlen eindeutig in der Form

$$\mathbb{N}^{\alpha_1} \cdot a_1 \; + \; \mathbb{N}^{\alpha_2} \cdot a_2 \; + \; \dots \; + \; \mathbb{N}^{\alpha_k} \cdot a_k$$

schreiben mit (endlich vielen!) Ordinalzahlen $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k \geq 0$, und Koeffizienten $a_i \in \mathbb{N} - \{ 0 \}$. Hierbei ist $\mathbb{N}^\alpha = \omega^\alpha$ die von Cantor definierte Ordinalzahlexponentiation zur Basis $\mathbb{N}$ (vgl. C 5).

Hessenberg bringt zwei Ordinalzahlen in ihre Cantorsche Normalform, und definiert dann die von ihm sogetaufte *natürliche Summe* der beiden Zahlen wie folgt. Er addiert zuerst paarweise die in den Normaldarstellungen auftretenden Glieder mit gleichen Exponenten. Diese Summen haben also die Form $\mathbb{N}^{\alpha_i} \cdot a_i$ oder $\mathbb{N}^{\alpha_i} \cdot (a_i + b_i)$ oder $\mathbb{N}^{\beta_i} \cdot b_i$. Anschließend summiert er alle diese Einzeladditionen zu einer neuen Normalform auf (d.h. die größeren Glieder kommen zuerst). So verschmelzen zwei Ordinalzahlen zu einer neuen. Betrachtet man die Operation, so sieht man schnell, dass immer nur endlich viele Paare dasselbe Ergebnis dieser Verschmelzung hinterlassen. Der Prozess ist also „fast“ injektiv. Zudem liegt die natürliche Summe recht nahe am Maximum der beiden Summanden. Hessenberg gewinnt aus diesen Beobachtungen dann relativ leicht den Additions- und Multiplikationssatz für Wohlordnungen, und mit Hilfe des Zermeloschen Wohlordnungssatzes folgen die uneingeschränkten Versionen. (Wir geben in C 5 eine Vereinfachung dieses ersten Hessenbergschen Beweises.)

Hessenberg hat Bernsteins Andeutungen über einen Cantorschen Beweis des Satzes nicht unkommentiert gelassen. Sowohl im Vorwort seines Buches als auch am Ende des Beweises des Multiplikationssatzes spricht er von einer „Mitteilung“ von Felix Bernstein, derzufolge das Resultat bereits von Cantor bewiesen worden war [Hessenberg 1906, p. IV und Ende § 77]. Hierbei ist nicht klar, ob sich Hessenberg lediglich auf die Bernsteinsche Dissertation bezieht oder ob es eine zusätzliche Korrespondenz mit Bernstein hierüber gab. (Ersteres erscheint wahrscheinlicher.) Im Vorwort schreibt er über diese Mitteilung von Felix Bernstein:

„Ob der in dieser Mitteilung flüchtig skizzierte Beweis derselbe ist, den ich hier [in §§ 75 – 77 dieser Abhandlung] darstelle, vermag ich nicht zu beurteilen.“

Dass die Beweisidee dieselbe ist, erscheint nicht unmöglich, da alle Zutaten des Hessenbergschen Beweises Cantorsche Eigengewächse sind, allen voran die Normaldarstellung transfiniter Zahlen. Wahrscheinlicher ist aber, dass Cantor einen Beweis gesehen hatte, der enger mit der Argumentation von Harward und Jourdain verwandt ist.

Weiter spricht Hessenberg von einem „wesentlich verschiedenen“ Beweis des Satzes, der ihm „in jüngster Zeit“ von Ernst Zermelo mitgeteilt worden sei, und demnächst veröffentlicht werde [Hessenberg 1906, Ende § 77]. Wie Cantors Beweis hat auch Zermelos Beweis nie das Licht der Welt gesehen. Im Hinblick auf die Arbeiten und Argumente von Zermelo aus dieser Zeit ist der Zermelosche Beweis vermutlich dem Zornschen Beweis des Satzes ähnlicher als den Beweisen von Hessenberg und Jourdain.

B9. Hessenbergs zweiter Beweis des Satzes

Hessenberg hat 1907 noch einen zweiten arithmetischen Beweis des Multiplikationssatzes gegeben, der die Cantorsche Normalform nicht verwendet, dafür aber von der feinen Dynamik der Ordinalzahlexponentiation in anderer Weise gebraucht macht. Die Exponentiation wurde von Cantor 1897 [Cantor 1897, § 18] eingeführt, und hat Ruhm erlangt als erstes Beispiel einer Definition durch transfinite Rekursion. Hessenbergs Beweis benutzt jedoch eine äquivalente rekursionsfreie Definition der Exponentiation, die auf Hausdorff zurückgeht. Modulo dieser Definition ist der zweite Hessenbergsche Beweis dann sehr einfach zu führen. (Wir geben diesen Beweis in C 6.)

Ziel ist es zu zeigen, dass unendliche Kardinalzahlen abgeschlossen unter Ordinalzahlmultiplikation sind, dass also $\alpha \cdot \beta < \kappa$ gilt für alle $\alpha, \beta < \kappa$, wobei κ eine unendliche Kardinalzahl ist. Hierfür verwendet Hessenberg die Abschätzung $\alpha \cdot \beta \leq 2^\alpha \cdot 2^\beta = 2^{\alpha + \beta} < 2^\kappa$. (Dass $\alpha + \beta < \kappa$ gilt, ist einfach zu sehen.) Die Behauptung folgt nun einfach daraus, dass für unendliche Kardinalzahlen $2^\kappa = \kappa$ gilt. (2^κ ist hier die Ordinalzahlexponentiation, nicht die identisch notierte Kardinalzahlexponentiation, für die immer $2^\kappa > \kappa$ gilt.) Für den Beweis dieser Aussage verwendet Hessenberg die rekursionsfreie Hausdorff-Hessenberg-Darstellung der Ordinalzahl-Exponentiation: Er braucht, dass die Mächtigkeit des Ergebnisses der Exponentiation 2^α nur von der Mächtigkeit von α abhängt, was aus der rekursiven Definition von 2^α im Gegensatz zur Hausdorff-Hessenberg-Darstellung nicht unmittelbar hervorgeht.

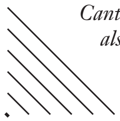
Schoenflies skizziert die beiden Hessenbergschen Beweise von 1906 und 1907 im zweiten Teil seines „Berichts" [Schoenflies 1908, p. 13f.]. In seiner Neufassung des ersten Teils von 1913 findet sich nur noch der erste Beweis [Schoenflies 1913, p. 131ff.]. Das schöne Argument der Arbeit von 1907 gerät in Vergessenheit.

B10. Jourdain (1908), Hausdorff (1914), und der heute übliche Beweis

Zwei Jahre nach Hessenberg veröffentlicht Philip Jourdain einen weiteren Beweis des Multiplikationssatzes. Er bildet die Grundlage für Hausdorffs Beweis in den „Grundzügen der Mengenlehre" von 1914, der, wie erwähnt, mit Harwards zweitem Beweis von 1905 zusammenfällt. Hausdorff bezeichnet Hessenbergs Beweis von 1906 in einer Anmerkung als „umständlich" [Hausdorff 1914, p. 456], was auf die Darstellung zutrifft, aber nicht auf den Beweis selber. Der heute übliche Beweis des Satzes folgt der Harward-Hausdorffschen Argumentation, und unterscheidet sich von ihr nur durch etwas bessere Feinmechanik und läuft dadurch etwas glatter; er ist Allgemeingut und mit keinem weiteren Namen verbunden (außer dass die im Beweis implizit konstruierte Funktion manchmal als Gödelsche Paarungsfunktion bezeichnet wird, vgl. C 3). Alle Beweise verwenden wie Hessenberg Ordinalzahlen, wobei die benutzten arithmetischen Operationen im Lauf der Zeit immer einfacher werden – Jourdain verwendet noch die Addition von Ordinalzahlen, der heutige Beweis kommt mit der trivialen Operation der Maximum-Bestimmung zweier Elemente einer Wohlordnung aus. Die

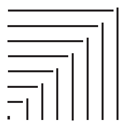
Kernbeobachtung ist, dass aus einer Wohlordnung einer Menge M sehr einfach eine Wohlordnung von $M \times M$ konstruiert werden kann, und dass dies zudem in einer fortsetzbaren Weise geschehen kann: Wird die Wohlordnung von M verlängert zu einer Wohlordnung von M', so ist die konstruierte Wohlordnung auf $M \times M$ ein Anfangsstück der Wohlordnung auf $M' \times M'$. Mit Hilfe dieser Fortsetzungseigenschaft zeigt man dann, dass in vielen wichtigen Spezialfällen die Wohlordnung auf $M \times M$ ordnungsisomorph zur Wohlordnung auf M selbst ist. Dies zeigt den Multiplikationssatz für Wohlordnungen, und wie bei Hessenberg folgt das allgemeine Ergebnis unter Heranziehung des Zermeloschen Wohlordnungssatzes. Und erst für diesen letzten Schritt wird das Auswahlaxiom verwendet.

Diese Schlüsselidee lässt sich ohne Arithmetik umsetzen, und der Beweis lässt sich daher rein mit Hilfe des Wohlordnungsbegriffs bequem führen; es ist nicht notwendig mit Ordinalzahlen zu arbeiten, nicht einmal aus Notationsgründen. (Wir geben einen derartigen Beweis in C 3.) Andererseits wird die zugrundeliegende Arithmetik nicht wirklich eliminiert, sondern lediglich verborgen: Die konstruierten Wohlordnungen sind immer einfach definierbare wohlgeordnete Summen von Wohlordnungen, und damit letztendlich arithmetischer Natur.



Cantors Diagonalaufzählung, definierbar als Polynom oder durch Vergleich der Koordinatensumme. Letzteres führt zu Jourdains allgemeiner Konstruktion.

Die lexikographische Harward-Hausdorff-Wohlordnung des linken oberen Dreiecks des Quadrats über einer wohlgeordneten Achse



Einweben des unteren Dreiecks führt zur heute üblichen Aufzählung des Quadrats über einer wohlgeordneten Achse.

Hessenbergs Wohlordnung über natürliche Summen lässt sich nicht leicht visualisieren. Ebenso ergäbe Jourdains Konstruktion von 1908 ein recht kompliziertes Diagramm.

Allen Konstruktionen der einfachen Wohlordnung auf $M \times M$ liegt eine Variation der Cantorschen Diagonalaufzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zugrunde. Jourdain schreibt in der Einleitung seines Artikels [Jourdain 1908]: „In order to prove that $\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$ where γ is any (finite or transfinite) ordinal number, we shall generalise Cantor's […] method of proving that $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$." Jourdain gibt in einer Fußnote die Cantorsche Bijektion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ als Polynom an, jedoch kommt es ihm hier nur auf die induzierte Ordnung der Elemente von $\mathbb{N}^2$ untereinander an: Will man (a, b) und $(c, d) \in \mathbb{N}^2$ bzgl. der Diagonalaufzählung miteinander vergleichen, so ist es nicht nötig, $f(a, b)$ und $f(c, d)$ auszurechnen und diese Werte miteinander zu vergleichen. Denn es gilt: $(a, b) < (c, d)$ *genau dann*, *wenn* $a + b < c + d$ oder $a + b = c + d$ und zudem $a < c$. Die Wohlordnung der Diagonalaufzählung kann geradezu in dieser Weise definiert werden, und diese Definition liefert dann, wie Jourdain erkannt hat, eine Wohlordnung von $\gamma \times \gamma$ für beliebige

Ordinalzahlen γ: Seien (α, β), $(\alpha', \beta') \in \gamma \times \gamma$. Dann setzen wir: $(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta')$, falls $\alpha + \beta < \alpha' + \beta'$ oder falls $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ und $\alpha < \alpha'$. Jourdain zeigt nun, dass diese Wohlordnung von $\gamma \times \gamma$ ordnungsisomorph zu γ ist, falls γ eine unendliche Kardinalzahl ist. Damit ist $|\gamma \times \gamma| = |\gamma|$ für unendliche Kardinalzahlen γ. Der allgemeine Multiplikationssatz folgt dann wie bei Hessenberg mit Hilfe des Wohlordnungssatzes von Ernst Zermelo.

Jourdains Beweis beruht also auf einer direkten Verallgemeinerung eines die Cantorsche Diagonalaufzählung von $\mathbb{N}^2$ definierenden Vergleichskriteriums. Jourdains Konstruktion besitzt allerdings die oben erwähnte Fortsetzungseigenschaft nicht in voller Allgemeinheit. Dies ist anders bei der Harward-Hausdorff-Konstruktion, welche – bei Harward und Hausdorff mit Ordinalzahlen, hier in der Sprache der Wohlordnungen formuliert – aus einer Wohlordnung auf M eine Wohlordnung nicht auf M^2, sondern auf $\{ (a, b) \mid a, b \in M, a < b \}$ erzeugt, also auf „dem linken oberen Dreieck“ von $M \times M$: Die Elemente dieser Menge werden lexikographisch geordnet, zunächst nach ihrer zweiten Komponente, und bei gleicher zweiter Komponente nach der ersten. Das gleichmäßige Einweben der analogen Ordnung auf dem anderen Dreieck von $M \times M$ (unter Einschluss der Diagonalen) führt zur heute üblichen „kanonischen“ Wohlordnung auf $M \times M$, und verkürzt den Beweis um einen oder zwei Hilfssätze (vgl. C 3; Hausdorff muss zusätzlich zeigen, dass das „obere linke Dreieck“ von $M \times M$ gleichmächtig zur ganzen Menge $M \times M$ ist für unendliche Mengen M).

B11. Problembewusstsein und Reaktionen

Es scheint, dass der allgemeine Multiplikationssatz nie „offiziell“ als offenes Problem formuliert worden ist. Cantor selbst konzentrierte sich auf Mengen der Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$, und trug mit dem Kontinuumsproblem – ob nämlich jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ oder die von $\mathbb{R}$ selbst habe – schwer genug auf den Schultern. Aus der Bemerkung in Bernsteins Dissertation geht aber hervor, dass sich Cantor mit dem Multiplikationssatz für Wohlordnungen zumindest gedanklich auseinandergesetzt hat. Auch zur Jahrhundertwende standen die Mächtigkeiten von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ noch immer im Rampenlicht des Interesses. Als eine Menge noch größerer Mächtigkeit als $\mathbb{R}$ wurde die Menge F der reellwertigen Funktionen untersucht, und allgemein zeigte Cantors Diagonalargument von 1891, dass die Menge aller Funktion einer Menge M in sich selbst immer größere Mächtigkeit hat als M selbst [siehe etwa Schoenflies 1900, p. 26]. Aber selbst eine Aussage wie $|F^2| = |F|$ findet sich zum Beispiel im Bericht von Schoenflies von 1900 nicht. (Wir beweisen diese Aussage elementar in Abschnitt C3.) Man rang noch mit relativ kleinen, erdnahen Mächtigkeiten, für die Beschäftigung mit astronomischen Größen war es noch etwas zu früh. Als große in voller Allgemeinheit noch zu bewältigende Aufgaben diskutierte man das Wohlordnungsproblem und das Problem der Vergleichbarkeit von Mengen, daneben machten aber auch die kleinen wiederum erdnahen Dinge größere Schwierigkeiten, etwa die Frage, ob eine nach der Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ nächstgrößere Mächtigkeit existiere: „Der einzige Fortschritt [im Kontinuumsproblem] ist der, dass man inzwischen wenigstens eine bestimmte Menge als zweite [unendliche] Mächtigkeit zu definieren gelernt hat.“ So schreibt Schoenflies zur Jahrhundertwende [eb., p. 27].

Selbst von einer „zweiten Mächtigkeit“ wie im Zitat von Schoenflies konnte man streng genommen nur für die wohlordenbaren Mengen sprechen: Die „bestimmte Menge“, sagen wir A, war wohlordenbar, aber man wusste nicht in voller mathematischer Klarheit, dass $|A| \leq |M|$ gilt für alle Mengen M mit $|\mathbb{N}| < |M|$. Man sah die Gültigkeit dieser Aussage für wohlordenbare M. Der allgemeine Fall benötigt eine weit über die Mengenlehre ohne Auswahlaxiom hinausgehende abgeschwächte Form des Wohlordnungssatzes, und erst Zermelos Arbeiten im ersten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts schalteten in diesem Gewölbe voller verwirrender Fragen das Licht an. In einer Bemerkung im zweiten Teil des Berichts geht Schoenflies auf dieses Problem *der* zweiten Mächtigkeit ein: „Erst dieser Satz [der Vergleichbarkeit von Mengen] würde uns das Recht geben, $\aleph_1$ [oben A genannt] als *die* zweite Mächtigkeit zu bezeichnen… Freilich hat der Sprachgebrauch sich längst an diese Bezeichnung gewöhnt. Er ist aber ohne den obigen Satz nicht gestattet.“ [Schoenflies 1908, p. 32].

Zwischen Cantors letzter bedeutender mengentheoretischer Arbeit von 1897 und bis zum wirkungsvollen Auftreten von Zermelo und Hausdorff 1904 fehlte schlichtweg ein kreativer und jugendlich-kraftvoller mathematischer Kopf ersten Ranges, der von Cantor den stilsicheren Umgang mit den neuen transfiniten Zahlen geerbt hätte. Aus mathematischer Sicht machte erst Hausdorffs allgemeine Untersuchung linearer Ordnungen ab 1906 die Definition von komplizierteren Ordnungen durch verschiedenste Vergleichskriterien zur handwerklichen Selbstverständlichkeit, und Hausdorff war es dann auch, der 1914 den ersten vollständig ausgeführten Beweis zu Papier brachte, der noch heute in Darstellung und Inhalt gleichermaßen überzeugt.

Interessant ist, die Reaktionen auf die Lösungen des Multiplikationsproblems zu verfolgen. In seinem Bericht von 1900 erwähnt Schoenflies ein allgemeines Multiplikationsproblem nicht. Im zweiten Teil des Berichts [Schoenflies 1908], beklagt er das Fehlen eines ausführlichen Beweises dessen, was Bernstein in seiner Dissertation nur andeutet (siehe das Zitat in B 5 oben). Anschließend referiert er die beiden Beweise von Hessenberg von 1906 und 1907. (Harwards Beweis dringt, wie erwähnt, in die mathematische Fachwelt gar nicht ein.) In der umgearbeiteten Fassung des ersten Teils aus dem Jahre 1913 schreibt Schoenflies zum Hessenbergschen Resultat und zum Beweis von Jourdain:

Schoenflies (1913): „Es liegt sehr nahe, diese Methode [der Diagonalaufzählung von $\mathbb{N}^2$] auf beliebige Alephs zu übertragen. Tatsächlich hat die Formel [der Multiplikationssatz für wohlgeordnete Mengen] deshalb auch stets als richtig gegolten, ehe man einen präzisen Beweis für sie besessen hat. Ph. Jourdain war der erste, der den Cantorschen Grundgedanken in ausführlicher Darstellung auf den Fall beliebiger Alephs ausgedehnt hat… Einen rein arithmetischen Beweis hat Hessenberg geliefert…“

Das „stets“ kann sich hier doch wohl nur auf die Zeit nach der Bernsteinschen Dissertation beziehen, bezeichnet also lediglich einen Zeitraum von fünf Jahren bis zur endgültigen Lösung des Problems 1906: Eine wichtige Formel, die als richtig gilt aber noch nicht vollständig bewiesen ist, sollte in einem Bericht wie dem Schoenfliesschen von 1900 irgendwo notiert sein. Ergebnisse wie

$$|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|, \quad |\mathbb{R} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{R}|, \quad |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$$

werden dort ausführlich diskutiert; für die Menge F aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ findet sich die Relation $|\mathbb{R}| < |F|$, aber die Frage $|F^2| = |F|$ wird ebensowenig erwähnt wie eine allgemeine Multiplikationshypothese für Mengen oder auch nur für wohlordenbare Mengen.

Das Multiplikationsproblem scheint also in den beiden letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts nur halbbewusst gewesen zu sein; eine größere Rolle spielt es erst seit der Dissertation von Felix Bernstein 1901. Die Tatsache, dass Hessenberg sein Resultat im knappen Vorwort seines Buches von 1906 ausführlich diskutiert, und die Besorgtheit von Jourdain um einen kleinen Platz in der Geschichte, die aus seinen Arbeiten herauszuhören ist, weisen darauf hin, dass man sich über die Bedeutung des nun völlig bewussten Problems und seiner Lösung sofort im klaren war. Eine ungewöhnliche Zwischenstufe in der Geschichte bilden die Bemerkungen von Bernstein über Cantors Einsichten in das Problem.

Die Nachwelt griff ab [Hausdorff 1914] den Beweis von Harward-Hausdorff mit Referenzen an Jourdain auf, unwissend um Harwards Priorität. Wie erwähnt, gilt Hausdorff die Hessenbergsche Argumentation als umständlicher. Es mag sein, dass sich der Beweis nach Harward-Hausdorff in den „normalen" auf Kompaktheit ausgerichteten Aufbau eines Textes oder einer Vorlesung zwangloser einfügt; die Autorität von Hausdorffs „Grundzügen der Mengenlehre" spielte aber sicher eine Rolle im Selektionsprozess „survival of the fittest proof". Man darf vermuten: Hätte Cantor selber den ersten Hessenbergschen Beweis gesehen und ihn als einfaches Korollar zu seiner Normalform notiert [etwa in Cantor 1997, §19], wäre das Argument heute ein bekannter mengentheoretischer Klassiker.

Ein bemerkenswertes historisches Detail in der Rezeptionsgeschichte des Multiplikationssatzes ist, dass in der „Einleitung in die Mengenlehre" von Abraham Fraenkel [Fraenkel 1928] das Multiplikationsproblem und seine Lösung nicht behandelt werden. Das Buch von Fraenkel richtet sich zwar an einen weiteren Leserkreis als die Überblicksartikel von Schoenflies oder das Buch von Hausdorff, jedoch ließe die Fülle des diskutierten Materials auf eine Erwähnung des Multiplikationsproblems schließen. Fraenkels Text glänzt mit dem umfangreichsten und sorgfältigsten Literaturverzeichnis der Zeit, die Arbeiten [Jourdain 1908] und [Harward 1905] allerdings fehlen, obwohl Fraenkel fünf Arbeiten von Jourdain zwischen 1905 und 1922 auflistet. Das Fehlen des Multiplikationsproblems bedeutet hier sicher keine mangelnde Wertschätzung, sondern ist eher ein Beleg dafür, dass sich das Problem aus einer einführenden Darstellung gut ausklammern lässt – hat man doch schon genug Mühe, den Lesern Ergebnisse wie $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ in ihrer historischen Dimension vor Augen zu führen. Als Übungsaufgaben für den Leser notiert Fraenkel aber immerhin die Mächtigkeitssätze $|F + F| = |F|$ und $|F \times F| = |F|$ für die Menge $F = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ [Fraenkel 1928, p. 102 und p. 120].

B12. Multiplikationssatz und Auswahlaxiom (1924)

Alle Beweise des Multiplikationssatzes verwenden mehr oder weniger direkt das Auswahlaxiom. Das Auswahlaxiom wird nicht gebraucht, um den Multiplikationssatz für wohlordenbare Mengen zu zeigen. Für das allgemeine Resultat wird aber der Zermelosche Wohlordnungssatz herangezogen, der zum Auswahlaxiom äquivalent ist. Der begrifflich elementare Beweis von Max Zorn verwendet das Zornsche Lemma, welches ebenfalls äquivalent zum Auswahlaxiom ist.

Es stellt sich die Frage, ob die Verwendung des Auswahlaxioms für einen Beweis des Multiplikationssatzes unumgänglich ist. Dies ist in der Tat der Fall: Nimmt man zu den um das Auswahlaxiom reduzierten Axiomen der Mengenlehre die Aussage des Multiplikationssatzes – quasi als Axiom – hinzu, so lässt sich in dieser Theorie das Auswahlaxiom beweisen. Auswahlaxiom und Multiplikationssatz sind also äquivalent (auf der Basis der übrigen Axiome). Dieses Resultat wird gewöhnlich einer Arbeit von Tarski aus dem Jahre 1924 zugeordnet [Tarski 1924], jedoch reichen die Vorarbeiten bis in das Jahr 1901 zurück. Felix Bernstein bewies in seiner Dissertation den folgenden Satz [Bernstein 1905, p. 131ff]:

Satz *(Satz von Felix Bernstein (1905))*

Seien M und N Mengen, und es gelte $|M \times N| = |M + N|$. Dann sind die Mächtigkeiten von M und N vergleichbar, d.h. es gilt $|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$

Der allgemeine Vergleichbarkeitssatz stand damals noch nicht zur Verfügung, und die Suche nach hinreichenden Bedingungen war eine natürliche Aufgabe der Zeit. Bernsteins Argument (vgl. Abschnitt C4) ist hübsch und kurz, aber nur vermeintlich logisch-elementar: Er verwendet versteckt das Auswahlaxiom. (Vgl. hierzu auch [Schoenflies 1913, p. 47f.], wo das Auswahlaxiom immer noch versteckt eingeht.) Dessen ungeachtet ist der Satz von Interesse, insbesondere aufgrund der binomischen Formel

$$(+) \quad |(M+N)^2| \;=\; |M^2 \;+\; \{0, 1\} \times M \times N \;+\; N^2|$$

Setzt man nämlich den Multiplikationssatz voraus, so kann man das Quadrat links in (+) weglassen, und die Formel zeigt dann insbesondere $|M \times N| \leq |M+N|$. Die Ungleichung $|M+N| \leq |M \times N|$ ist für Mengen mit mehr als einem Element trivial, und mit Cantor-Bernstein haben wir also $|M \times N| = |M+N|$ aus dem Multipliaktionssatz abgeleitet. Aus dem Satz von Bernstein folgt nun die Vergleichbarkeit von M und N. Soweit findet sich alles bereits in der Dissertation von Bernstein 1901. Leider wird aber das Auswahlaxiom im Beweis des Satzes von Bernstein verwendet. Es ist aber aus dem Beweis abzulesen, dass das Auswahlaxiom nicht gebraucht wird, wenn man eine der beiden Mengen M und N im Satz von Bernstein als wohlordenbar voraussetzt. Gegeben den allgemeinen Multiplikationssatz und eine beliebige Menge M, wählt Tarski nun als N eine Wohlordnung, die sich nicht in M injektiv einbetten lässt. Dass eine derart lange Wohlordnung immer existiert, hat Friedrich Hartogs 1915 innerhalb der Zermeloschen Mengenlehre ohne Auswahlaxiom (und insbesondere ohne Ersetzungsaxiom) gezeigt [Hartogs 1915].

Nun läuft Bernsteins Argument ohne Auswahlaxiom durch, und wir erhalten $|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$. Letzteres ist nach Wahl von N ausgeschlossen, also gilt $|M| \leq |N|$. Somit ist M wohlordenbar, da sich M in eine wohlordenbare Menge einbetten lässt. Dieses Argument liefert also den Wohlordnungssatz aus dem Multiplikationssatz ohne irgendeine Verwendung des Auswahlaxioms! Wir geben einen vollständigen Beweis für den Satz von Tarski-Bernstein in C4, der dem Prinzip der „historical correctness" verpflichtet ist.

Tarski stellte die sich aufdrängende Frage, ob der Additionssatz ebenfalls zum Auswahlaxiom äquivalent ist. Dies ist jedoch nicht der Fall: Der Additionssatz ist echt schwächer als das Auswahlaxiom (aber dennoch echt stärker als eine Mengenlehre ganz ohne Auswahlaxiom). Beweise dieses Resultats wurden unabhängig voneinander und mit verschiedenen Methoden von Gershon Sageev sowie Dan Halpern und Paul Howard gegeben [Segeev 1975, Halpern / Howard 1976]. Es gibt eine Fülle verwandter Resultate, siehe hierzu zum Beispiel [Jech 1973] oder [Halbeisen / Shelah 2001].

B13. Max Zorn: Ein wohlordnungsfreier Beweis (1944)

Max Zorn hat 1935 sein heute nach ihm benanntes Lemma veröffentlicht – fortan fester Bestandteil im Werkzeugkoffer des Algebraikers –, und es 1944 für einen Beweis des Additions- und Multiplikationssatzes verwendet [Zorn 1944]. Der Begriff der Wohlordnung kann so ganz vermieden werden, auf Kosten der Anschaulichkeit und feinen Struktur des Arguments. Der Beweis selbst beruht auf einer doppelten Anwendung des Zornschen Lemmas. Zunächst wird der Additionssatz gezeigt, oder bequemer eine verschärfte Form wie etwa

$|\mathbb{N} \times M| \;=\; |M|$ für unendliche Mengen M,

aus der der Additionssatz sofort folgt. Anschließend gewinnt man den Multiplikationssatz, unter Verwendung der Zerlegung von $(X \cup Y)^2$ in die vier Teile

$X \times X,\;\; Y \times Y,\;\; X \times Y,\;\; Y \times X.$

Beide Schritte benutzen das Zornsche Lemma. Die zugrundeliegenden partiellen Ordnungen sind jeweils kanonisch. Sparsamkeit ist hier nicht recht am Ort, und so spielt es keine Rolle, dass neben dem Satz von Cantor-Bernstein auch noch der Vergleichbarkeitssatz verwendet wird.

Wir geben einen derartigen logisch-verschwenderischen, aber begrifflich-elementaren Beweis im übernächsten Kapitel. Bemerkenswert ist, dass die Möglichkeit eines wohlordnungsfreien Beweises in die Standardliteratur der Mengenlehre allenfalls marginal eingegangen ist [z.B. in Levy 1979, p. 163].

C. Mathematischer Teil

C1. Approximation an den Satz

Wir schreiben reelle Zahlen in Dezimaldarstellung, wobei wir im zweideutigen Fall die unendliche Darstellung wählen, die schließlich konstant die Ziffer 9 aufweist.

Haben wir nun zwei reelle Zahlen im offenen Einheitsintervall $I =]\,0, 1\,[$,

$x = 0, a_0\, a_1\, a_2 \dots$ und $y = 0, b_0\, b_1\, b_2 \dots$

vorliegen, so können wir „im Reissverschlussverfahren" eine neue reelle Zahl

$z = 0, a_0\, b_0\, a_1\, b_1\, a_2\, b_2 \dots$

bilden. Die so entstehende Abbildung ist zwar nicht surjektiv, aber injektiv, und somit ist $|I \times I| \leq |I|$, und nach Cantor-Bernstein also $|I \times I| = |I|$. Die Funktion $\tan(2x/\pi)$ ist bijektiv von I nach $\mathbb{R}$, und somit ist $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Man kann das Reissverschlussverfahren durch den Trick von Julius König veredeln (vgl. B2), und direkt eine Bijektion zwischen $I \times I$ und I erhalten:

Ein *Block* einer reellen Zahl $x = b, a_0\, a_1\, a_2 \dots$ in Dezimaldarstellung ist endliche Folge $a_n, a_{n+1}, \dots a_{n+m}$ aus Nachkommastellen mit der Eigenschaft:

$a_{n-1} \neq 0$ (falls $n > 0$), $a_n = \dots = a_{n+m-1} = 0$, $a_{n+m} \neq 0$.

Ist etwa $x = 0{,}02300100034\dots$, so sind 02, 3, 001, 0003, 4 die ersten Blöcke von x. Wir amalgamieren nun zwei reelle Zahlen $x, y \in I$, indem wir Blöcke anstelle von Ziffern im Reissverschlussverfahren aneinanderreihen. Mit x wie eben und $y = 0{,}001078093\dots$ mit den Blöcken 001, 07, 8, 09, 3, … erhalten wir zum Beispiel

0, 02 001 3 07 001 8 0003 09 4 3 …

Es ist leicht zu überprüfen, dass die so entstehende Abbildung $I \times I$ bijektiv auf I abbildet. Dabei verwenden wir erneut Dezimaldarstellungen, die nicht in 0 terminieren (also etwa 0,4999… anstelle von 0,5 = 0,5000…).

Einen ganz anderen Beweis von $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ erhält man wie folgt durch Zusammenschau zweier einfacher Beobachtungen.

Satz *(Vererbungslemma für die Multiplikationsregel)*

Sei M eine unendliche Menge, und es gelte $|M + M| = |M|$. Dann gilt $|\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)| = |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis

Sei $f : M \times \{0\} \cup M \times \{1\} \to M$ bijektiv. Für $X \times Y \in \mathcal{P}(M)^2$ sei $g(X \times Y) = f[\,X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}\,]$. Dann ist $g : \mathcal{P}(M)^2 \to \mathcal{P}(M)$ bijektiv.

Kardinalzahlarithmetisch notiert sich der Beweis einfach als $2^\kappa \cdot 2^\kappa = 2^{\kappa+\kappa} = 2^\kappa$. Vgl. hierzu [Cantor 1895, §4].

Wir brauchen nun nur noch eine einfache, aber fundamentale Gleichmächtigkeit:

Satz *(reelle Zahlen als Teilmengen von $\mathbb{N}$)*

Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis

zu $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$*:* Ist $X \subseteq \mathbb{N}$, so betrachten wir die reelle Zahl $x \in [\,0, 1\,[$, deren n-te Nachkommastelle in Dezimaldarstellung 1 ist, falls $n \in X$ gilt, und 0 sonst. Die so entstehende Abbildung ist injektiv.

zu $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$*:* Wir zeigen $|I| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Wir schreiben ein $x \in I$ in Binärdarstellung $x = 0, a_0\, a_1\, a_2 \ldots$ mit $a_n \neq 0$ unendlich oft, und setzen $X = \{ n \mid a_n = 1 \}$. Die so entstehende Abbildung ist injektiv.

Als Korollar zu den beiden Sätzen erhalten wir sofort $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$, denn es gilt $|\mathbb{N} + \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Weiter kann man nun Aussagen wie $|F \times F| = |F|$ für die Menge $F = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ aller reellwertigen Funktionen ableiten: Zunächst gilt $|F| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$, wie man leicht zeigt. Die Behauptung folgt nun aus dem Lemma und der Aussage $|\mathbb{R} + \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Es gilt $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| < |F|$. Ob jede Teilmenge G von F mit der Eigenschaft $|\mathbb{R}| < |G|$ gleichmächtig zu F ist, ist eine innerhalb der üblichen Mathematik ebenso unlösbare Frage wie das Kontinuumsproblem (also die Frage, ob jedes $X \subseteq \mathbb{R}$ mit $|\mathbb{N}| < |X|$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist). Dies folgt aus den Arbeiten von Kurt Gödel und Paul Cohen. Man kann durch geschickte Konstruktion von Modellen der Mengenlehre die Mächtigkeiten von $\mathbb{R}$ und F fast beliebig – und unabhängig voneinander – einstellen. Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ und $|F| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$ – die Potenzmengenoperation führt immer zu größeren Mächtigkeiten. Wie mächtig der Sprung von einer unendlichen Menge M zu ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist, ist in der üblichen Mathematik nicht lösbar. Je nach philosophischer Einstellung ist die Frage nach der wahren Größe von $\mathcal{P}(M)$ sinnlos oder rührt, selbst im einfachsten Fall $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, an eines der tiefsten Geheimnisse der Mathematik.

C2. Ein begrifflich elementarer Beweis des Multiplikationssatzes

Wir geben einen einfachen Beweis des Multiplikationssatzes, der keine Wohlordnungen verwendet. Ein erster derartig elementarer Beweis des Satzes findet sich in [Zorn 1944].

Bereits die Hälfte des Beweises steckt in dem folgenden nützlichen Hilfssatz.

Satz *(Zerlegung in abzählbar viele gleichgroße Teile)*

Sei M eine unendliche Menge. Dann existiert eine Menge N mit $|M| = |\mathbb{N} \times N|$.

Beweisidee in einem Satz: Schöpfe M aus durch disjunkte Folgen der Länge $\mathbb{N}$, und sammle dann alle Elemente mit jeweils gleichem Index.

Beweis

Wir setzen

$$P = \{ X \mid (1) \text{ jedes } f \in X \text{ ist eine Injektion von } \mathbb{N} \text{ nach } M,$$
$$(2) \text{ verschiedene } f, g \in X \text{ haben disjunkte Wertebereiche } \}$$

Wir ordnen P durch Inklusion: Für $X, Y \in P$ sei $X \leq Y$, falls $X \subseteq Y$. Wegen $|\mathbb{N}| \leq |M|$ ist P nichtleer. Das Zornsche Lemma findet Anwendung:

Sei also X maximal in P, und sei $M' = \bigcup_{f \in X} f[\mathbb{N}]$. Dann ist $M - M'$ endlich aufgrund der Maximalität von X. Sei also

$$M - M' = \{ a_1, \ldots, a_n \}, \text{ wobei } n \geq 0.$$

Wir fixieren ein $f \in X$ und definieren $g : \mathbb{N} \to M$ durch

$$g(i) = a_{i+1} \text{ für } 0 \leq i < n, \quad g(i) = f(i-n) \text{ für } i \geq n$$

Sei $Y = (X - \{ f \}) \cup \{ g \}$, und sei $Y_0 = \{ f(0) \mid f \in Y \}$. Für $(n, x) \in \mathbb{N} \times Y_0$ setzen wir $h(n, x) = f(n)$, wobei f das eindeutige $f \in Y$ ist mit $f(0) = x$. Dann ist $h : \mathbb{N} \times Y_0 \to M$ bijektiv.

Korollar *((abzählbarer Multiplikationssatz)*

Sei M eine unendliche Menge. Dann gilt $|\mathbb{N} \times M| = |M|$.

Beweis

Sei N eine Menge mit $|M| = |\mathbb{N} \times N|$. Dann gilt:

$$|\mathbb{N} \times M| = |\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times N)| = |\mathbb{N}^2 \times N| = |\mathbb{N} \times N| = |M|$$

Dieser Trick findet sich schon in [Zermelo 1901]. Vgl. auch [Hausdorff 1914, p. 126] und die Bemerkung unten in C5 nach dem Beweis des Abgeschlossenheits von Alephs unter Addition.

Wegen $|M| \leq |M + M| \leq |\mathbb{N} \times M| = |M|$ haben wir auch gezeigt:

Korollar *(Additionssatz)*

Sei M eine unendliche Menge. Dann gilt $|M + M| = |M|$.

Wir erhalten nun leicht:

Satz *(Multiplikationssatz)*

Sei M eine unendliche Menge. Dann gilt $|M \times M| = |M|$.

Beweis

Sei $P = \{ f \mid f : A \times A \to A \text{ bijektiv für ein } A \subseteq M \}$, geordnet durch Inklusion. Wegen M unendlich und $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ ist P nichtleer. Das Zornsche Lemma findet Anwendung. Sei f also maximal in P, und sei $X \times X$ der Definitionsbereich von f. Dann gilt $|X^2| = |X|$.

Annahme $|X| < |M|$. Dann gilt $|X| \leq |M - X|$, denn andernfalls ist

$|M - X| \leq |X|$ und $|M| = |X \cup (M - X)| \leq |X + X| = |X|$.

Sei also $Y \subseteq M - X$ mit $|Y| = |X|$. Wir setzen

$Z = X \cup Y, \quad R = Y \times Y \cup X \times Y \cup Y \times X$.

Dann gilt:

$|R| = |Y^2 + 2\,(X \times Y)| = |Y^2 + X \times Y| = |X^2 + X^2| = |X^2| = |X| = |Y|$

Sei $g : R \to Y$ bijektiv. Es gilt $X \times X \cup R = Z \times Z$, und damit ist die Funktion $f \cup g : Z \times Z \to Z$ bijektiv, *im Widerspruch* zur Maximalität von f. Also ist $|X| = |M|$, sodass

$|M \times M| = |X \times X| = |X| = |M|$.

C3. Ein Beweis mit Wohlordnungen

Aus Wohlordnungen kann man in vielerlei Weise neue Wohlordnungen gewinnen. Hier ist eine spezielle Konstruktion von Interesse, nämlich eine natürliche Wohlordnung von $W \times W$, gegeben eine Wohlordnung von W: Wir setzen für $(a, b), (c, d) \in W^2$:

$(a, b) < (c, d)$, falls einer der folgenden drei Fälle eintritt:

(i) das Maximum von a und b ist kleiner als das Maximum von c und d,

(ii) die Maxima sind gleich und es gilt $a < c$,

(iii) die Maxima sind gleich, es gilt $a = c$, und es gilt $b < d$.

Der Leser zeichne eine Skizze der Ordnung für $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Vgl. auch das Diagramm in B 10.

Es ist leicht zu sehen, dass $W \times W$ hierdurch wohlgeordnet wird (die entstehende Ordnung ist eine Summe von Wohlordnungen und damit selbst eine Wohlordnung). Diese Wohlordnung von W^2 ist eine sehr natürliche und allgemeine Variante von Cantors Diagonalaufzählung von $\mathbb{N}^2$, wobei die Aufzählungslinie hier nicht aus Diagonalen, sondern aus Waagrechten und Senkrechten zusammengesetzt ist, wie man das ja auch für $\mathbb{N}^2$ tun könnte.

Obige Definition findet sich in dieser Form in [Gödel 1940, Def. 7.8]. Die zugeordnete Ordinalzahlfunktion $\Gamma(\alpha, \beta)$ = „die Länge von $\{ (\gamma, \delta) \mid (\gamma, \delta) < (\alpha, \beta) \}$ unter der Ordnung <“ wird zuweilen als Gödelsche Paarungsfunktion bezeichnet. Sie bildet die Klasse der Ordinalzahlpaare bijektiv auf die Klasse der Ordinalzahlen ab.

Hausdorff und Harward verwenden die lexikographische Wohlordnung auf der Menge $W^* = \{ (a, b) \in W^2 \mid a < b \}$ [vgl. Hausdorff 1914, p. 126]. Die sich ergebende ordinale Paarungsfunktion lässt sich dann arithmetisch einfach notieren als $\Gamma'(\alpha, \beta) = (\Sigma_{\gamma < \beta}\, \gamma) + \alpha$. Sie bildet die Klasse der Paare von Ordinalzahlen α, β mit $\alpha < \beta$ bijektiv auf die Klasse der Ordinalzahlen ab.

Satz *(Multiplikationssatz für wohlgeordnete Mengen)*

Ist W eine unendliche wohlgeordnete Menge, so ist $|W \times W| = |W|$.

Beweis

Annahme nicht. Sei W ein kürzestes Gegenbeispiel. Dann ist $|X| < |W|$ für jedes Anfangsstück X von W. Wir betrachten W^2 mit der oben konstruierten Wohlordnung. Da $|W| < |W \times W|$ nach Annahme, ist diese Wohlordnung von W^2 länger als die Wohlordnung von W. Sei dann $(a, b) \in W^2$ derart, dass das durch (a, b) gegebene Anfangsstück

$$U = \{ (c, d) \mid (c, d) < (a, b) \}$$

von W^2 gleichlang mit W ist. Nach minimaler Wahl von W kann W kein größtes Element haben (Verlängern einer unendlichen Wohlordnung um ein Element ändert die Mächtigkeit nicht). Also existiert ein $c \in W$ mit $a, b < c$. Wir betrachten nun das Anfangsstück $X = \{ a \mid a < c \}$ von W. Da $a, b < c$ gilt, ist U ein Anfangsstück von X^2, wobei X^2 wieder wie oben wohlgeordnet ist. Dann gilt:

$$|U| \leq_{①} |X^2| =_{②} |X| <_{②} |W| =_{③} |U|, \text{ *Widerspruch!*}$$

[①: U ist Anfangsstück von X^2. ②: jeweils nach minimaler Wahl von W. ③: U und W sind gleichlang.]

Bis hierhin wird das Auswahlaxiom nicht gebraucht. Wir brauchen das Auswahlaxiom aber, um den Multiplikationssatz folgern zu können:

Korollar *(Multiplikationssatz)*

Sei M eine unendliche Menge. Dann gilt $|M \times M| = |M|$.

Beweis

Es existiert eine Wohlordnung von M. Der Satz folgt also aus dem obigen speziellen Multiplikationssatz für Wohlordnungen.

C4. Zur logischen Stärke des Multiplikationssatzes

Beide Beweise des Multiplikationssatzes bemühen das Auswahlaxiom: Der erste in Form des Zornschen Lemmas, der zweite in der Form des Wohlordnungssatzes. In der Tat ist der Multiplikationssatz auf der Basis der anderen Axiome äquivalent zum Auswahlaxiom, wie wir nun zeigen wollen.

Die Beweisidee für dieses Resultat findet sich bereits 1901 in der Dissertation von Felix Bernstein, einen vollständigen Beweis gab Alfred Tarski 1924 [Tarski, 1924]. Neben der Bernsteinschen Arbeit spielt die Arbeit von Friedrich Hartogs aus dem Jahre 1915 eine wesentliche Rolle. Wir beweisen den Satz in einer Weise, die die historische Entwicklung nachzeichnet, und dabei nicht wesentlich länger ist als eine kondensierte Version, die der Leser selber zu verdünnen hätte. Der Beweis wird getreu der Originalarbeiten ganz in der Sprache der Wohlordnungen geführt, ohne Verwendung von Ordinalzahlen.

Satz *(Trick von Felix Bernstein (1901))*

Seien M, N Mengen, und es gelte $|M \times N| \leq |M + N|$. Dann gilt:

$|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$.

Es handelt sich im einen „historischen Satz", da der Beweis des Satzes das Auswahlaxiom verwendet, und die Konklusion des Satzes in der Mengenlehre mit Auswahlaxiom ja ohne Voraussetzung richtig ist. Wichtig und zeitlos ist hier aber die Beweisidee:

Beweis

Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir $M \cap N = \emptyset$ an, und identifizieren $M + N$ mit $M \cup N$. Sei dann $f : M \times N \to M \cup N$ injektiv.

1. Fall: Es existiert ein $x \in M$ mit $f[\{x\} \times N] \subseteq M$.

Wir fixieren ein solches x und setzen $g(y) = f(x, y)$ für $y \in N$. Dann ist $g : N \to M$ injektiv, also $|N| \leq |M|$.

2. Fall: Für alle $x \in M$ ist $B(x) = \{ y \in N \mid f(x, y) \in N \} \neq \emptyset$.

Wir definieren $g : M \to N$ wie folgt. Für $x \in M$ sei

$g(x) = f(x, y)$, wobei y ein beliebiges Element von $B(x)$ ist.

(Hier wird das Auswahlaxiom verwendet, da wir aus den Mengen $B(x)$ für $x \in M$ Elemente auswählen müssen, um g definieren zu können.)

Dann ist $g : M \to N$ injektiv, da f injektiv ist, und somit ist $|M| \leq |N|$.

Eine wichtige Beobachtung ist:

Bemerkung

Ist die Menge N wohlordenbar, so wird das Auswahlaxiom im Beweis nicht gebraucht. Denn wir können dann im 2. Fall die Funktion g definieren durch

$g(x) = f(x, \min(B(x)))$ für $x \in M$,

wobei sich das Minimum auf eine beliebig fixierte Wohlordnung von N bezieht.

Wir brauchen nun nur noch den Satz von Friedrich Hartogs: Es kann keine Menge M geben, in die sich alle wohlordenbaren Mengen einbetten lassen. Die dämonische Existenz solch einer riesigen, jeder Ordnung spottenden Menge lag als sporadisch nachwirkendes Kindheitstrauma über der frühen noch nicht analysierten Mengenlehre. Zermelos Wohlordnungssatz zeigte ihre Nichtexistenz, der Satz von Hartogs zeigte ihre Nichtexistenz sogar ohne Rückgriff auf den Wohlordnungssatz.

Satz *(Existenz beliebig großer Wohlordnungen, Satz von Hartogs (1915))*
Sei M eine Menge. Dann existiert eine wohlordenbare Menge W derart, dass non($|W| \leq |M|$) gilt.

Beweis (ohne Verwendung des Auswahlaxioms)
Sei H die Menge aller Wohlordnungen von Teilmengen von M. (Die leere Menge gilt als Wohlordnung von $\emptyset \subseteq M$, sodass also $\emptyset \in H$.) Für alle $X, Y \in H$ setzen wir:

$X \sim Y$, *falls* X und Y sind gleichlang

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf H. Sei $W = H/\sim$. Für alle $X/\sim$, $Y/\sim \in W$ setzen wir

$X/\sim \; < \; Y/\sim$, *falls* X ist kürzer als Y

Dies ist wohldefiniert und liefert eine Wohlordnung auf W. Für jedes $X/\sim \in W$ ist das durch $X/\sim$ gegebene Anfangsstück $\{ Z \in W \mid Z < X/\sim \}$ von W gleich $\{ Y/\sim \mid Y$ ist Anfangsstück von $X \}$, und hat damit die gleiche Länge wie X. Die Wohlordnung W kann daher nicht die Länge einer Wohlordnung X einer Teilmenge von M haben, denn für ein solches X ist $X/\sim \in W$ und Wohlordnungen sind immer länger als ihre Anfangsstücke. Also gilt non($|W| \leq |M|$), denn eine Injektion $f : W \to M$ induziert eine Wohlordnung der Länge von W auf der Menge $f[W] \subseteq M$.

Hartogs zeigt mit diesem Beweis, dass die Vergleichbarkeit von Mengen den Wohlordnungssatz, und damit das Auswahlaxiom impliziert: Ist M eine Menge, so sei W eine Wohlordnung wie im Satz von Hartogs. Mit Vergleichbarkeit gilt $|M| \leq |W|$ oder $|W| \leq |M|$. Letzteres ist nach Wahl von W nicht möglich. Also gilt $|M| \leq |W|$. M lässt sich also in eine Wohlordnung einbetten, und ist dadurch wohlordenbar. Weiter zeigt sein Satz:

Hartogs (1915): „Hiermit ist, ohne das Auswahlprinzip oder die Vergleichbarkeit der Mengen anzuwenden, der Nachweis geführt, dass es keine Menge geben kann, deren Mächtigkeit größer ist als die Mächtigkeit jeder beliebigen wohlgeordneten Menge." [Hartogs 1915, p. 442].

Der Leser vergleiche hierzu eine Fußnote von Schoenflies, die Hartogs hier möglicherweise im Auge hatte:

Schoenflies (1908): „Es liegt nahe, Mengen, deren Mächtigkeit jedes Aleph übertrifft [deren Mächtigkeit die jeder wohlordenbaren Menge übertrifft], als widerspruchsvoll zu betrachten. Aber dies hängt andererseits so enge mit den nicht hinlänglich geklärten Problemen der Wohlordnung und der Vergleichbarkeit zusammen, dass ich vorziehe, mich dahin auszusprechen, es liege hier noch eine Lücke der Erkenntnis vor. Immerhin scheint es mir zweckmäßig jede Berufung auf die Existenz oder Nichtexistenz derartiger Mengen zu vermeiden." [Schoenflies 1908, p.32 f, Fußnote 4].

Es lag zwar eine Lücke in der Erkenntnis wirklich vor, aber der Beweis von Hartogs zeigt, dass diese am falschen Ort vermutet wurde – sie hatte nichts mit der Wohlordnung oder Vergleichbarkeit von Mengen zu tun.

In der heutigen Mengenlehre erscheint die Konstruktion von Hartogs zumeist in der Form

$$\mathrm{H}(M) \; = \; \text{„die kleinste (von-Neumann-)Ordinalzahl } \alpha \text{ mit non}(|\alpha| \leq |M|)\text{“}$$

Für die Existenz von α wird das Ersetzungsaxiom gebraucht, das Hartogs weder zur Verfügung stand noch für sein Argument benötigt wird. Dieses Vorgehen ist ein Beispiel für die Verschleierungstechniken eleganter Mathematik.

Wir erhalten nun durch Kombination der Argumente von Bernstein und Hartogs das Resultat, dass sich aus dem Multipliaktionssatz die Wohlordenbarkeit jeder Menge und damit das Auswahlaxiom gewinnen lässt [Tarski 1924]:

Satz *(Bernstein-Tarski: der Multiplikationssatz impliziert das Auswahlaxiom)*

In der Mengenlehre ohne Auswahlaxiom gilt:

Es gelte $|M \times M| = |M|$ für jede (Dedekind-)unendliche Menge M. Dann lässt sich jede Menge wohlordnen.

Beweis

Sei M beliebig. Nach dem Satz von Hartogs existiert eine wohlgeordnete Menge W mit $\mathrm{non}(|W| \leq |M|)$. Ohne Einschränkung ist W unendlich. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |M \times W| \; &\leq \; |M^2 \; + \; M \times W \; + \; W \times M \; + \; W^2| \\ &= \; |(M + W)^2| \; = \; |M + W| \end{aligned}$$

Aus $|M \times W| \leq |M + W|$ und der Wohlordenbarkeit von W folgt aber $|M| \leq |W|$ oder $|W| \leq |M|$ nach dem Lemma von Bernstein, ohne Verwendung des Auswahlaxioms. $|W| \leq |M|$ ist aber nach Wahl von W unmöglich, also gilt $|M| \leq |W|$. Also ist M in eine Wohlordnung einbettbar, und damit ist M selbst wohlordenbar.

Der Trick mit der binomischen Formel findet sich ebenfalls schon in der Dissertation von Bernstein [vgl. Bernstein 1905, p. 132].

Der Beweis zeigt eine lokale Version des Satzes: Gilt

$$|(M + W)^2| \; = \; |M + W|$$

für eine einzige Wohlordnung W, die mindestens so lang ist wie die Hartogs-Wohlordnung $W(M)$, so ist M wohlordenbar. Im Multiplikationssatz steckt eine Kraft, die man der schlichten Aussage zunächst wohl gar nicht zutraut. Wie in Abschnitt B 10 diskutiert, lässt sich dagegen alleine aus dem Additionssatz der Wohlordnungssatz (oder das Auswahlaxiom) nicht gewinnen.

C5. Der erste Beweis von Hessenberg

Wir geben den ersten Beweis von Hessenberg, in modernem Gewande und vereinfacht. Hierzu wird allerdings eine gewisse Vertrautheit mit Ordinalzahlen und Kardinalzahlen vorausgesetzt, die verwendeten Begriffe sind aber immer noch elementar. Etwas Ordinalzahlarithmetik vorausgesetzt ist dieser Beweis sehr kurz, klar und einprägsam, und er adelt zudem die Cantorsche Normaldarstellung von Ordinalzahlen mit einer überraschenden Anwendung.

Für eine Ordinalzahl α sei $W(\alpha) = \{ \beta \mid \beta$ Ordinalzahl und $\beta < \alpha \}$ [vgl. hierzu Hausdorff 1914, p. 104]. Wird die von-Neumann-Definition von 1923 verwendet, so gilt $W(\alpha) = \alpha$, was wir aber hier, wie Hessenberg und seine Zeitgenossen 1906, nicht brauchen. $W(\alpha)$ wird durch die $<$-Relation der Ordinalzahlen wohlgeordnet, und der Ordnungstyp dieser Wohlordnung ist α selbst.

Eine Ordinalzahl κ heißt eine Kardinalzahl, falls $|W(\alpha)| < |W(\kappa)|$ gilt für alle $\alpha < \kappa$. Die *Kardinalität einer Ordinalzahl* α, in Zeichen $|\alpha|$, ist die eindeutige Kardinalzahl κ mit $|W(\alpha)| = |W(\kappa)|$. Für jede Ordinalzahl α existiert weiter eine kleinste Kardinalzahl, die größer als α ist, und diese wird mit α^+ bezeichnet. (Zum Beweis der Existenz von α^+ wird der Satz von Hartogs verwendet.)

Für Ordinalzahlen α ist die Ordinalzahl ω^α rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \omega^0 &= 1 \\ \omega^{\alpha+1} &= \omega^\alpha \cdot \omega \\ \omega^\lambda &= \sup_{\alpha<\lambda} \omega^\alpha \quad \text{für Limeszahlen } \lambda \end{aligned}$$

In dieser Weise hat Cantor die Exponentiation eingeführt [Cantor 1897, §18], und damit das Ur-Beispiel für eine transfinite rekursive Definition aufgestellt.

Ordinalzahlen der Form ω^α heißen auch *Hauptzahlen* oder *Haupttypen*. Die ersten Hauptzahlen sind $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^\omega, \dots$ Hauptzahlen α sind charakterisiert durch die Abgeschlossenheit unter Addition: Sind $\beta, \gamma < \alpha$, so ist $\beta + \gamma < \alpha$.

Analog zu ω^α ist 2^α definiert (oder allgemeiner β^α). Es gilt $\alpha \le 2^\alpha \le \omega^\alpha$ für alle Ordinalzahlen α. Weiter gelten die üblichen Rechenregeln, etwa $\omega^\alpha \cdot \omega^\beta = \omega^{\alpha+\beta}$, $(\omega^\alpha)^\beta = \omega^{\alpha \cdot \beta}$, usw.

Für den Beweis von Hessenberg brauchen wir die elementare Tatsache, dass jede Kardinalzahl eine Hauptzahl ist:

Satz *(Abgeschlossenheit von Alephs unter Addition)*

Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, und sei $\alpha, \beta < \kappa$. Dann ist $\alpha + \beta < \kappa$.

Beweis

Es genügt zu zeigen: Ist $\lambda < \kappa$ ein Limes, so ist $\lambda + \lambda < \kappa$. Wir schreiben Ordinalzahlen α in der Form $\alpha = L(\alpha) + R(\alpha)$, mit $R(\alpha) \in \mathbb{N}$ und $L(\alpha)$ Limesordinalzahl oder 0. Für $\alpha < \lambda$ definieren wir $f(\alpha) = L(\alpha) + 2\,R(\alpha)$ und weiter $f(\lambda + \alpha) = L(\alpha) + 2\,R(\alpha) + 1$. Dann ist $f : W(\lambda + \lambda) \to W(\lambda)$ bijektiv.

Harward zeigt 1905, dass $|\omega \cdot \kappa| = |\kappa|$ für alle Ordinalzahlen gilt, woraus der Additionssatz sofort folgt: Als Limes ist $\kappa = \omega \cdot \beta$ (de facto gilt $\beta = \kappa$, was wir aber nicht brauchen). Dann gilt $|\omega \cdot \kappa| = |\omega^2 \cdot \beta| = |\omega \cdot \beta| = \kappa$.

Es folgt der Additionssatz: Ist $|M| = |W(\alpha)|$, so ist

$$|M + M| \;=\; |W(\alpha + \alpha)| \;<\; \alpha^+,$$

letzteres wegen $\alpha + \alpha < \alpha^+$. Also gilt $|M + M| = |W(\alpha)|$. Zur Gewinnung eines α mit $|M| = |W(\alpha)|$ wird der Wohlordnungssatz verwendet.

Der Beweis von Hessenberg beruht nun darauf, dass sich eine eine beliebige Ordinalzahl eindeutig in endliche Vielfache von Hauptzahlen zerlegen lässt:

Satz *(Cantorsche Normalform, Cantor 1897)*

Jede Ordinalzahl γ lässt sich in eindeutiger Weise schreiben als

$$\gamma \;=\; \omega^{\alpha_1}\, n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq n_i < \omega$ für $1 \leq i \leq k$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k \geq 0$.

(Der Fall $k = 0$ entspricht $\gamma = 0$).

Beweis

Durch eine einfache Induktion über alle Ordinalzahlen γ, analog zum Beweis einer Normalform für $\gamma \in \mathbb{N}$ mit Basis 10 statt ω.

Cantor hat die Normaldarstellung in [Cantor 1897, § 19] nur für Ordinalzahlen α aufgestellt, für die $W(\alpha)$ abzählbar ist. Der Beweis von Cantor funktioniert aber für alle Ordinalzahlen α.

Die Darstellung in Normalform lässt kreativen Raum für auf den ersten Blick etwas schräge Varianten der Ordinalzahladdition:

Definition *(modifizierte Hessenberg-Summe oder natürliche Summe)*

Seien γ, δ Ordinalzahlen, und sei

$$\gamma \;=\; \omega^{\alpha_1}\, n_1 \;+\; \ldots \;+\; \omega^{\alpha_k} \cdot n_k,$$

$$\delta \;=\; \omega^{\alpha_1}\, m_1 \;+\; \ldots \;+\; \omega^{\alpha_k} \cdot m_k$$

die *gemeinsame Normaldarstellung* von γ und δ, d.h. wir lassen $n_i = 0$ oder $m_i = 0$ zu, um eine identische absteigende Folge von Exponenten zu erhalten; jedoch soll gelten $n_i \neq 0$ oder $m_i \neq 0$. Weiter sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die Cantorsche Diagonalaufzählung von $\mathbb{N}^2$. Dann ist die *(modifizierte) natürliche Summe* von γ und δ, in Zeichen $\gamma +_H \delta$, definiert durch

$$\gamma +_H \delta \;=\; \omega^{\alpha_1} \cdot f(n_1, m_1) \;+\; \ldots \;+\; \omega^{\alpha_k} \cdot f(n_k, m_k).$$

Hessenberg verwendet die Addition $n_i + m_i$ anstelle von $f(n_i, m_i)$, was zum Verlust der Injektivität führt und unnötige Zugluft für die ins Auge gefasste Anwendung hereinlässt.

Mit dieser Variation der Hessenberg-Summe sind wir nun aber schon am Ziel:

Satz

Sei α eine Hauptzahl. Dann ist $+_H : W(\alpha) \times W(\alpha) \to W(\alpha)$ bijektiv.

Beweis

Wir haben $+_H(\gamma, \delta) < \alpha$ für alle $\gamma, \delta < \alpha$, denn α ist als Hauptzahl abgeschlossen unter Addition, und damit auch unter natürlichen Summen. Bijektivität folgt aus der Bijektivität von f und der Eindeutigkeit der Normalform.

Diese wenigen Zeilen, die aus den Definitionen fließen, bilden eigentlich den ganzen Beweis des Multiplikationssatzes.

Mit der üblichen Methode gewinnen wir hieraus:

Korollar *(Multiplikationssatz)*

Sei M eine unendliche Menge. Dann gilt $|M \times M| = |M|$.

Beweis

Sei α minimal mit $|M| = |W(\alpha)|$ (ein solches α existiert nach dem Wohlordnungssatz). Dann ist α eine unendliche Kardinalzahl, und damit eine Hauptzahl. Also gilt $|M| = |W(\alpha)| = |W(\alpha) \times W(\alpha)| = |M \times M|$.

C6. Der zweite Beweis von Hessenberg

Hessenberg hat in [Hessenberg 1907] einen weiteren – recht skurilen – Beweis des Multiplikationssatzes geführt, der noch stärker als sein erster Beweis auf den Subtilitäten der Ordinalzahlexponentiation beruht. Wir geben hier eine etwas vereinfachte Darstellung dieses Beweises.

Wir brauchen wieder die Abgeschlossenheit von Kardinalzahlen unter Addition und darüber hinaus einen nicht ganz trivialen Hilfssatz. Dieser besagt, dass die Mächtigkeit der Ordinalzahlexponentiation 2^α nur von der Mächtigkeit $|\alpha|$ des Exponenten α abhängt. Er ergibt sich aus einem bemerkenswerten Satz von Hausdorff und Hessenberg ([Hausdorff 1906, Hessenberg 1907]):

Satz *(Rekursionsfreie Darstellung der Ordinalzahlexponentiation)*

Sei W eine Wohlordnung, und sei F die Menge aller Funktion von W nach $\{ 0, 1 \}$, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschieden sind. Für alle $f, g \in F$ sei

$f < g$, *falls* $f(x) < g(x)$, wobei x = „das W-größte y mit $f(y) \neq g(y)$“

Dann ist $<$ eine Wohlordnung auf F. Ist der Ordnungstyp von W gleich α, so ist der Ordnungstyp von F gleich 2^α.

Aus diesem Satz ergibt sich der benötigte Hilfssatz:

Korollar

Sei α eine unendliche Ordinalzahl. Dann ist $|2^\alpha| = |2^{|\alpha|}|$.

Beweis

Die Mächtigkeit der Menge F des vorangehenden Satzes hängt nur von der Mächtigkeit von W ab.

Der Leser vergleiche die analoge Aussage $|\alpha \cdot \beta| = ||\alpha| \cdot |\beta||$ für die Multiplikation. Sie ist klar, wenn die Multiplikation von Ordinalzahlen über das kartesische Produkt (und nicht rekursiv) definiert wird.

Das Herzstück des zweiten Beweises ist nun die folgende Beobachtung:

Satz

Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann ist $2^\kappa = \kappa$.

Beweis

Annahme nicht. Sei κ die kleinste unendliche Kardinalzahl mit $2^\kappa > \kappa$. Offenbar gilt $2^\omega = \omega$, sodass $\omega < \kappa$. Aufgrund der Stetigkeit der Ordinalzahlexponentiation existiert ein transfinites $\alpha < \kappa$ mit $2^\alpha \geq \kappa$. Dann gilt

$$|2^{|\alpha|}| \;=\; |2^\alpha| \;\geq\; \kappa \;>\; |\alpha|,$$

im Widerspruch zur minimalen Wahl von κ.

Hieraus folgt in einer Zeile:

Satz *(Abgeschlossenheit von Kardinalzahlen unter Multiplikation)*

Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, und sei $\alpha < \kappa$. Dann ist $\alpha \cdot \alpha < \kappa$.

Beweis

Es gilt $\alpha \cdot \alpha \;\leq\; 2^\alpha \cdot 2^\alpha \;=\; 2^{\alpha + \alpha} \;<\; 2^\kappa \;=\; \kappa$.

Korollar *(Multiplikationssatz)*

Sei M eine unendliche Menge. Dann ist $|M \times M| = |M|$.

Beweis

Sei α eine Ordinalzahl mit $|M| = |W(\alpha)|$ (Wohlordnungssatz). Dann gilt

$$|M \times M| = |W(\alpha \cdot \alpha)| < \alpha^+.$$

Also gilt $|M \times M| = |M|$.

Warum ist dieser Beweis skuril? Wir brauchen $\alpha \cdot \alpha < \kappa$ für $\alpha < \kappa$, wobei κ eine unendliche Kardinalzahl ist. Es gilt sicher $\alpha \cdot \alpha < \alpha \cdot \kappa$. Also würde die benötigte Ungleichung aus $\alpha \cdot \kappa = \kappa$ folgen. Der Beweis dieser Aussage macht Schwierigkeiten. Es ist einfacher $2^\kappa = \kappa$ zu zeigen. Hessenberg zeigt sogar $\alpha^\kappa = \kappa$, was wesentlich schwieriger aussieht als $\alpha \cdot \kappa = \kappa$, und schließt das Argument dann mit der trivialen Rechnung $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 < \alpha^\kappa = \kappa$.

In der Tat gilt aber, wie Hessenberg zeigt: Ist $2^\gamma = \gamma$ für eine Ordinalzahl γ, so ist $\alpha^\gamma = \gamma$ für alle $2 \leq \alpha < \gamma$ [Hessenberg 1907, p. 136]. Zahlen mit dieser starken Abgeschlossenheitseigenschaft – für die es für die Multiplikation kein Analogon gibt – heißen ε-Zahlen. Die Kardinalzahlen bilden eine echte Teilklasse der ε-Zahlen. Ihre Untersuchung geht ebenfalls bereits auf Georg Cantor zurück (vgl. [Cantor 1897, § 20].)

Der Witz ist hier, dass wir uns auf eine feste, kleine Basis – nämlich 2 – der Exponentiation zurückziehen können. Hieran scheitert das Argument, wenn es auf die Aussage „$\alpha \cdot \kappa = \kappa$" angewendet wird. Wir brauchen die Exponentiation zu einer kleinen Basis, um die Multiplikation in den Griff zu bekommen. Andererseits kann man die Multiplikation mit dem Linksfaktor 2 verwenden, um die Addition zu behandeln:

Zweiter Beweis der Abgeschlossenheit von Alephs unter Addition

Wir zeigen zunächst:

(+) Sei κ unendliche Kardinalzahl. Dann gilt $2 \cdot \kappa = \kappa$.

Annahme nicht. Sei dann κ das kleinste Gegenbeispiel. Aufgrund der Stetigkeit der Multiplikation existiert ein $\beta < \kappa$ mit $2 \cdot \beta \geq \kappa$. Dann gilt

$$|2 \cdot |\beta|| = |2 \cdot \beta| \geq \kappa$$

Also ist $|\beta|$ ein kleineres Gegenbeispiel, *Widerspruch*.

Aus (+) folgt: Ist κ unendliche Kardinalzahl, und sind $\alpha \leq \beta < \kappa$, so ist

$$|\alpha + \beta| \leq |\beta + \beta| = |2 \cdot \beta| = |2 \cdot |\beta|| = |\beta|,$$

sodass $\alpha + \beta < \kappa$.

Wir halten schließlich fest, dass auch ein Exponentiationssatz gilt: Ist α eine unendliche Ordinalzahl, so ist $|\alpha^\alpha| = |\alpha|$. Denn es gilt

$$|\alpha| \leq |\alpha^\alpha| \leq |(2^\alpha)^\alpha| = |2^{\alpha \cdot \alpha}| = |2^{|\alpha|}| = |\alpha|$$

(Der Beweis verwendet das Auswahlaxiom nicht, im Gegensatz zu einem naiven Beweis von $|\alpha^\beta| = |\alpha|$ durch Induktion nach $1 \leq \beta \leq \alpha$, der im Limesschritt die Regularität von α^+ verwendet.)

Insgesamt gilt also

$$|\alpha + \alpha| = |\alpha \cdot \alpha| = |\alpha^\alpha| = |\alpha| \text{ für alle unendlichem Ordinalzahlen } \alpha.$$

Dabei war der Beweis des Exponentiationssatzes nicht mehr schwierig. Das gilt für viele weitere Berechnungen: Der Multiplikationssatz erledigt die einfachen Fragen der Mächtigkeitstheorie.

C7. Harwards ursprünglicher Beweis

Jourdain hat ab 1904 versucht, den Multiplikationssatz für Wohlordnungen zu beweisen, ohne aber dabei bis 1908 einen klaren Beweis zu Papier zu bringen [vgl. Jourdain 1904]. Die frühen unvollständigen Versuche verwenden zudem das Auswahlaxiom, etwa in Regularitätsargumenten der Form $\sup_{n < \omega} \beta_n < \omega_1$ für abzählbare β_n, $n < \omega$. Harward hat durch Lektüre insbesondere der Jourdainschen Arbeiten von 1904 einen interessanten Beweis gefunden (er verwendet ebenfalls Regularitätsargumente). Wir geben diesen Beweis des Multiplikationssatzes für Wohlordnungen in etwas vereinfachter Form. Das folgende Lemma spielt eine Schlüsselrolle:

Satz *(Harwards Ordinalzahlpaarung)*

Für Ordinalzahlen γ, δ sei $H(\gamma, \delta) = \omega^\gamma (\delta + 1)$. Dann ist H injektiv.

Beweis

Wir halten folgende Beobachtung für Ordinalzahlen α, β, ζ, ξ fest:

Ist $\alpha + \omega^\xi = \beta + \omega^\zeta$, so ist $\xi = \zeta$.

Ohne Einschränkung gelte $\xi \leq \zeta$. Dann ist $\alpha = \beta + \rho$ für ein $\rho < \omega^\zeta$. Also gilt

$$\alpha + \omega^\xi \; = \; \beta + \omega^\zeta \; = \; \beta + (\rho + \omega^\zeta) \; = \; (\beta + \rho) + \omega^\zeta \; = \; \alpha + \omega^\zeta,$$

sodass $\xi = \zeta$.

(Die Eigenschaft $\rho + \omega^\lambda = \omega^\lambda$ für alle $\rho < \omega^\lambda$ ist charakteristisch für alle Hauptzahlen ω^λ.)

Sei nun

$$H(\gamma_1, \delta_1) \; = \; \omega^{\gamma_1} \delta_1 + \omega^{\gamma_1} \; = \; \omega^{\gamma_2} \delta_2 + \omega^{\gamma_2} = H(\gamma_2, \delta_2).$$

Dann ist $\gamma_1 = \gamma_2$ nach obiger Beobachtung, also

$$\omega^{\gamma_1} \delta_1 + \omega^{\gamma_1} \; = \; \omega^{\gamma_1} \delta_2 + \omega^{\gamma_1}.$$

Weiter ist dann aber $\omega^{\gamma_1} \delta_1 = \omega^{\gamma_1} \delta_2$, sodass $\delta_1 = \delta_2$.

Mit diesem Lemma zeigen wir nun:

Beweis des Multiplikationssatzes für Wohlordnungen

Wir zeigen durch Induktion für alle Ordinalzahlen $\alpha \geq \omega$ simultan die folgenden Aussagen:

(i) $|\alpha^2| = |\alpha|$

(ii) $|\omega^\alpha| = |\alpha|$

Der Fall $\alpha = \omega$ und der Nachfolgerschritt sind klar, da

$$|\omega^{\alpha+1}| = |\alpha| \cdot \omega = |\omega \cdot \omega \cdot \beta| = |\omega \cdot \beta| = |\alpha|,$$

wobei $|\alpha| = \omega \cdot \beta$.

Sei also α ein Limes.

zu (i): Die Aussage folgt aus der I. V., falls $|\alpha| < \alpha$ gilt. Sei also α eine Kardinalzahl. Nach I. V. ist $H(\gamma, \delta) < \alpha$ für alle $\gamma, \delta < \alpha$, also ist $H | W(\alpha)^2 \to W(\alpha)$ injektiv, und es folgt (i).

zu (ii): ω^α ist Supremum von $|\alpha|$-vielen Zahlen ω^β, $\beta < \alpha$, die nach I. V. alle die Mächtigkeit $\leq |\alpha|$ haben. Also ist $|\omega^\alpha| \leq |\alpha| \cdot |\alpha| = |\alpha|$, letzteres nach (i), falls α Kardinalzahl, und nach I. V., falls $|\alpha| < \alpha$.

(Für die Abschätzung $|\omega^\alpha| \leq |\alpha| \cdot |\alpha|$ wird das Auswahlaxiom verwendet, da wir für jedes $\beta < \alpha$ eine Injektion $f_\beta : W(\omega^\beta) \to W(\alpha)$ wählen müssen.)

Dass $\omega^\alpha < \kappa$ für alle $\alpha < \kappa$ und alle Kardinalzahlen $\kappa \geq \omega_1$ gilt, ist ohne Auswahlaxiom beweisbar, wenn der Multiplikationssatz für Wohlordnungen bereits zur Verfügung steht.

Der Beweis zeigt insbesondere den Multiplikationssatz für Wohlordnungen, verwendet aber unnötigerweise das Auswahlaxiom. Ist dies auch ein wesentlicher Defekt der Beweisführung, so bleibt doch das hübsche Injektivitäts-Lemma, und schließlich ist der Beweis ja auch nicht falsch. Harward hat damit als erster einen vollständigen Beweis des Multiplikationssatzes publiziert. Wie im historischen Teil erwähnt, gibt Harward zudem in einem einige Monate nach dem Hauptteil geschriebenen Anhang zu seinem Aufsatz eine Skizze derjenigen Konstruktion an, die Hausdorff 1914 wiederentdecken wird [Harward 1905, p. 458]. Dieser Beweis des Multiplikationssatzes für Wohlordnungen verwendet das Auswahlaxiom nicht.

Literatur

Bernstein, Felix 1905 *Untersuchungen aus der Mengenlehre.* (Zeitschriften-Veröffentlichung der Dissertation von Felix Bernstein, Göttingen 1901). Mathematische Annalen 61, 117 – 155.

Brouwer, Luitzen 1911 *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl.* Mathematische Annalen 70, 161 – 165.

Cantor, Georg 1874 *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 77, 258 – 262.

– 1878 *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 84, 242 – 258.

– 1890/1891 *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 1 (1890/1891), 75 – 78.

– 1895 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Mathematische Annalen 46 (1895), 481 – 512.

– 1897 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (zweiter Artikel).* Mathematische Annalen 49 (1897), 207 – 246.

– 1932 *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Herausgegeben von Ernst Zermelo. Springer, Berlin. Reprographischer Nachdruck Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1962. Bibliographisch ergänzte Neuauflagen 1980, 1990 bei Springer, Berlin.

– 1984 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872 – 1884.* Herausgegeben von Günter Asser, B. G. Teubner, Leipzig.

– 1991 *Briefe.* Herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson. Springer, Berlin.

Deiser, Oliver 2004 *Einführung in die Mengenlehre.* zweite erweiterte Auflage, Springer, Berlin.

Fraenkel, Abraham 1928 *Einleitung in die Mengenlehre.* 3. Auflage, Springer, Berlin.

Gödel, Kurt 1940 *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory.* Annals of mathematical studies 3 (1940). Princeton University Press.

Halbeisen, Lorenz / Shelah, Saharon 2001 *Relations between some cardinals in the absence of the axiom of choice.* The Bulletin of Symbolic Logic 7/2 (2001), 237 – 261.

Halpern, Dan / Howard, Paul 1976 *The law of infinite cardinal addition is weaker than the axiom of choice.* Transactions of the American Mathematical Society 220 (1976), 195 – 204.

Hartogs, Friedrich 1915 *Über das Problem der Wohlordnung.* Mathematische Annalen 76, 438 – 443.

Harward, A. E. 1905 *On the transfinite numbers.* Philosophical Magazine 6/10 (1905), 439 – 460.

Hausdorff, Felix 1904 *Der Potenzbegriff in der Mengenlehre.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 13 (1904), 569 – 571.

– 1906 *Untersuchungen über Ordnungstypen.* Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physikalische Klasse 58 (1906), 106 – 169.

– 1908 *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen.* Mathematische Annalen 65 (1908), 435 – 508.

– 1914 *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit & Comp., Leipzig. (Nachdruck Chelsea Publishing Company, New York 1949).

– 2002 *Gesammelte Werke in 8 Bänden, Band II: Grundzüge der Mengenlehre.* Hrsg. E. Brieskorn et al. Springer, Berlin.

Hessenberg, Gerhard 1906 *Grundbegriffe der Mengenlehre.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

– 1907 *Potenzen transfiniter Ordnungszahlen*. Jahresbericht der Deutschen-Mathematiker-Vereinigung 16(1907), 130 – 137.

Jech, Thomas 1973 *The Axiom of Choice.* North-Holland, Amsterdam/London.

– 2002 *Set Theory.* Springer, Berlin.

Jourdain, Philip 1904a *On the transfinite cardinal numbers of well-ordered aggregates.* Philosophical Magazin 6/7 (1904), 61 - 75.

– 1904b *On the transfinite cardinal numbers of number-classes in general.* Philosophical Magazin 6/7 (1904), 294 – 303.

– 1908 *On the multiplication of alephs.* Mathematische Annalen 65 (1908), 506 – 512.

Levy, Azriel 1979 *Basic Set Theory.* Springer, Berlin.

Meschkowski, Herbert 1967 *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors.* Vieweg, Braunschweig.

Moore, Gregory H. 1976 *Ernst Zermelo, A. E. Harward, and the axiomatization of set theory.* Historia Mathematica 3 (1976), 206 – 209.

Sageev, Gershon 1975 *An independence result concerning the axiom of choice*. Annals of Mathematical Logic 8 (1975), 1 – 184.

Schoenflies, Arthur 1900 *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 1. Teil.* Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8, Heft 2, 1 – 250, B. G. Teubner, Leipzig.

– 1908 *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 2.Teil* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2. Ergänzungsband. B. G. Teubner, Leipzig.

– 1913 *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Umarbeitung des im VIII. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Berichts.* B. G. Teubner, Leipzig.

Tarski, Alfred 1924 *Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiom du choix.* Fundamenta Mathematicae 5 (1924), 147 – 154.

Zermelo, Ernst 1901 *Über die Addition transfiniter Kardinalzahlen*. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch physikalische Klasse (1901), 34 – 38.

– 1904 *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.* Mathematische Annalen 59 (1904), 514 – 516.

Zorn, Max 1935 *A remark on method in transfinite algebra.* Bulletin of the American Mathematical Society 41 (1935), 667 – 670.

– 1944 *Idempotency of infinite cardinals.* University of California Publications 2, 9 - 12.

3. Zur Geschichte des Kardinalzahlbegriffs

Wir diskutieren endliche und unendliche Kardinalzahlen aus mathematischer und historischer Perspektive. Der Schwerpunkt liegt auf der Definition von Georg Cantor aus dem Jahr 1895, ihren Verbindungen mit traditionellen Zahldefinitionen sowie ihrer Rezeption und Transformation in der axiomatischen Mengenlehre. Weiter verfolgen wir im Detail die Entwicklung des Begriffs in Cantors Schriften von 1874 bis hin zur abschließenden Definition von 1895.

„J'ay fait icy à peu pres comme Euclide, qui ne pouvant pas bien >faire< entendre absolument ce que c'est que *raison* prise dans le sens des Geometres, definit bien ce que c'est que *memes raisons.*" Leibniz, Fünfter Brief an Clarke, August 1716, art. 47; siehe [Robinet 1957, p. 145]

„I have here done much like Euclid, who not being able to make his readers well understand what ratio is absolutely in the sense of geometricians; defines what are the same ratios." (Übersetzung: [Alexander 1956])

Einleitung

„Kardinalzahl" ist ein Schlüsselbegriff der Mengenlehre, aber er ist nicht leicht zu definieren. Cantor baute seine neue Theorie auf Ordinal- und Kardinalzahlen auf, aber er gab, was heutige Standards betrifft, keine genaue Definition beider Begriffe. Die Komplexität einer präzisen Definition wurde erst viel später erkannt, und es spricht für Cantors herausragende Intuition, dass er alle grundlegenden Phänomene der unendlichen Ordinal- und Kardinalzahlen ohne eine formal-untadelige Definition finden konnte – einschließlich der Tatsache, dass die Komprehensionen aller Ordinal- und Kardinalzahlen, in heutiger Sprache „echte Klassen" sind.

In diesem Essay diskutieren wir, an Mathematik, Geschichte und Philosophie interessiert, den Begriff einer endlichen und unendlichen Kardinalzahl. Ziel ist, eine umfassende und vielfältige Darstellung des Themas zu präsentieren. Dabei stehen die Arbeiten von Georg Cantor naturgemäß im Mittelpunkt.

Wir setzen voraus, dass der Leser ein Grundwissen über axiomatische Mengenlehre besitzt. Einige kurze Formulierungen der griechischen Mathematik werden im Original zitiert, um sie von Übersetzungen unabhängiger zu machen. Eine Kenntnis des Altgriechischen ist nicht notwendig.

Die axiomatische Mengenlehre, wie sie in der Zermelo-Fraenkel-Axiomatik formuliert und in der Prädikatenlogik erster Stufe formalisiert wird, ist unser Maßstab. Wir analysieren Dokumente und verfolgen Entwicklungen, die aus der Sicht der axiomatischen Mengenlehre interessant sind (mathematisch, historisch und philosophisch). Dass die axiomatische Mengenlehre als Orientierung und Sieb dient, bedeutet nicht, dass der „absolute Wert" von Beiträgen zu den Grundlagen der Mathematik nur mit ZFC gemessen werden könnte. Aber ZFC hat präzise Antworten auf die Fragen, denen wir hier nachgehen, gefunden, und sich geschichtlich als die Theorie etabliert, die aus diesen Fragen hervorging. Ein Vergleich mit der Analysis drängt sich hier auf: Als mathematische Messlatte der Grundlagen der Analysis kann der heutige Begriff „vollständiger angeordneter Körper" dienen, auf dessen Basis sich die von Newton und Leibniz gefundene Differential- und Integralrechnung präzise entwickeln lässt. Das schließt andere Ansätze mit tatsächlich vorhandenen infinitesimalen Größen nicht aus.

Drei Aspekte dieses Essays sind vielleicht explizit erwähnenswert: (1) Die Darstellung ist nicht streng chronologisch. (2) Wir greifen eine zweitausend Jahre lange Zeitspanne auf. Die griechische Zahldefinition ist für die Kardinalzahlen der Mengenlehre ebenso wichtig wie bestimmte Überlegungen der Scholastik. (3) Cantors Theorie ist mehr als eine Vorstufe der axiomatischen Mengenlehre, aber es führt doch ein direkter Weg von ihm zu ZFC. Seine Schriften sind von unvergleichbarer Bedeutung, geschichtlich und inhaltlich. ZFC erscheint als Interpretation des Cantorschen Erbes.

Der Essay ist wie folgt aufgebaut:

Abschnitt A: Heutige mathematische Sicht

Wir beginnen mit den beiden heutigen Definitionen von *Kardinalzahl* von John von Neumann in ZFC (1923, 1928) in ZFC und Dana Scott in ZF (1955). Diese Definition ergeben, zusammen mit zugehörigen metamathematischen Ergebnissen von Azriel Levy (1969) und anderen, den Rahmen für alles Weitere (entsprechend dem Leitmotiv des Maßstabs ZFC).

Abschnitt B1: Antike und Scholastik

In Abschnitt B diskutieren wir, in vier Unterabschnitten, Meilensteine der Entwicklung hin zu den heutigen axiomatischen Definitionen. Wir beginnen mit den Definitionen von „Zahl“ (ἀριϑμός) in der Griechischen Mathematik. Sie wurden durch das Mittelalter hindurch immer wieder aufgegriffen und spielen eine Schlüsselrolle für den Cantorschen Kardinalzahlbegriff.

Abschnitt B2: Cantors Definition von 1895

Wir springen zu Cantors abschließender und einflussreichster Definition von „Kardinalzahl“ aus den „Beiträgen“ von 1895. Einige Bestandteile dieser Definition sind in den heutigen Definitionen nicht mehr vorhanden. Es ist ein Ziel dieses Essays, seinen Begriff im Licht sowohl der Tradition als auch der Anpassung und schließlich formalen Interpretation sinngetreu und möglichst genau zu beschreiben.

Abschnitt B3: Frege und Russell im Kontrast

Wir stellen Cantors Definition der von ihr stark verschiedenen Behandlung von Kardinalzahlen durch Frege und später Russell gegenüber. Dabei gehen wir auch auf den unglücklichen Streit zwischen Cantor und Frege ein.

Abschnitt B4: Rezeption der Cantorschen Definition

Thema dieses Abschnitts ist die Rezeption von Cantors Definition durch die Mengentheoretiker der folgenden Generation (in chronologischer Form). Im Zentrum steht hier Felix Hausdorff und sein Lehrbuch von 1914. Die Rezeption führt schließlich zu den modernen Definitionen.

Abschnitt C: Detailanalyse des Cantorschen Begriffs

Wir blicken zurück und analysieren Cantors Ausführungen zu Kardinalzahlen in seinen Veröffentlichungen, Aufzeichnungen und Briefen ab 1874 im Detail. Dadurch können wir die Reifung des Begriffs über einen Zeitraum von zwei Jahrzehnten beobachten. Wie in Abschnitt B4 ist die Darstellung chronologisch. Sie mündet in die abschließende Definition von 1895.

Ein strikt chronologischer Aufbau des Essays wäre aus der Sicht des Autors eher nachteilig. Die Details des Cantorschen Kardinalzahlbegriffs können, je nach Interesse des Lesers, ebenso faszinierend wie ermüdend sein. Abschnitt C ist nicht nötig, um nachvollziehen zu können, was passiert ist und kann damit als „Anhang" aufgefasst werden. Er kann aber umgekehrt auch zum Ausgangspunkt werden, die weniger bekannten Originalarbeiten von Georg Cantor aufzusuchen und neu zu interpretieren.

A. Die heutigen Definitionen

Wir stellen in kompakter Form die heute üblichen Kardinalzahldefinitionen vor. Allgemeiner diskutieren wir die Möglichkeiten, Repräsentanten für Äquivalenzrelationen auf echten Klassen zu definieren. Dabei arbeiten wir in der axiomatischen Mengenlehre ZFC von Zermelo-Fraenkel (mit Auswahlaxiom) oder Teilsystemen wie ZF (ZFC ohne Auswahlaxiom).

Der grundlegende Mächtigkeitsvergleich für Mengen wird wie folgt erklärt:

Definition *(Mächtigkeitsrelationen)*

Für alle Mengen M und N definieren wir:

$|M| = |N|$, *falls* es gibt eine Bijektion $f : M \to N$

$|M| \leq |N|$, *falls* es gibt eine Injektion $f : M \to N$

$|M| < |N|$, *falls* $|M| \leq |N|$ und $|M| \neq |N|$

Gilt $|M| = |N|$, so sagen wir, dass die *Kardinalität von M gleich der Kardinalität von N* ist oder dass *die Mengen M und N die gleiche Mächtigkeit* besitzen. Analoges gilt für „kleinergleich" und „kleiner".

Dieses Vorgehen entspricht Cantors relationaler Definition der Mächtigkeit aus dem Jahr 1878. Es liefert uns keine Kardinalzahlen als Objekte unserer Theorie, d.h. keine Kardinalzahlen als Mengen. Möchten wir derartige Objekte, so brauchen wir:

Kardinalzahldefinitionen in ZFC und ZF

Definition *(Kardinalzahldefinition)*

Eine funktionale Klasse $\mathrm{Card} : V \to V$ auf dem Mengenuniversum V heißt eine *Kardinalzahldefinition*, falls für alle Mengen M und N gilt:

$\mathrm{Card}(M) = \mathrm{Card}(N)$ *genau dann, wenn* $|M| = |N|$ *(Korrektheit)*

Eine Kardinalzahldefinition $\mathrm{Card} : V \to V$ heißt *repräsentierend*, falls für jede Menge M gilt:

$|\mathrm{Card}(M)| = |M|$

Die Repräsentationseigenschaft ist, wie leicht zu sehen ist, äquivalent zur Idempotenz-Eigenschaft:

$\mathrm{Card}(\mathrm{Card}(M)) = \mathrm{Card}(M)$ für alle Mengen M

Ist Card eine Kardinalzahldefinition und M eine Menge, so heißt die Menge $\mathrm{Card}(M)$ die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* der Menge M (bzgl. der Definition Card). Wir schreiben auch $|M|_{\mathrm{Card}}$ oder kurz $|M|$ anstelle von $\mathrm{Card}(M)$. Diese Notation ist aufgrund der Korrektheitseigenschaft mit der relationalen Definition $|M| = |N|$ der Gleichmächtigkeit verträglich.

In der axiomatischen Mengenlehre gibt es zwei bedeutsame Kardinalzahldefinitionen. Die erste ist:

Definition *(kanonische Kardinalzahldefinition in ZFC)*

Wir definieren $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZFC}} : V \to V$, indem wir für alle Mengen M setzen:

$\mathrm{Card}_{\mathrm{ZFC}}(M) =$ „die kleinste Ordinalzahl α mit $|M| = |\alpha|$“

Die funktionale Klasse $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZFC}}$ ist eine repräsentierende Kardinalzahldefinition. Das Auswahlaxiom ist für die Definition unentbehrlich. Es stellt sicher, dass es für alle M eine Ordinalzahl α gibt mit $|M| = |\alpha|$. Diese Aussage ist äquivalent zur Wohlordenbarkeit jeder Menge und damit zum Auswahlaxiom.

Steht das Auswahlaxiom nicht zur Verfügung, so können wir die Trunkierungsmethode von Scott verwenden:

Definition *(kanonische Kardinalzahldefinition in ZF)*

Wir definieren $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZF}} : V \to V$, indem wir für alle Mengen M setzen:

$\mathrm{Card}_{\mathrm{ZF}}(M) = \{ N \mid N$ hat minimalen Rang mit $|M| = |N| \}$

Dabei ist der *Rang* einer Menge N definiert durch

$\mathrm{rang}(N) =$ „die kleinste Ordinalzahl α mit $N \subseteq V_\alpha$“,

mit der α-ten Stufe V_α der von Neumann-Hierarchie. Die Menge $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZF}}(M)$ ist die *Rang-Trunkierung* der Klasse $\{ N \mid |M| = |N| \}$. Diese Klasse ist echt, falls M nichtleer ist. Das Auswahlaxiom wird nicht verwendet. Dafür ist nun das Fundierungsaxiom notwendig: Es stellt sicher, dass die von Neumann-Hierarchie das Universum V ausschöpft:

$V = \bigcup_\alpha V_\alpha$

Damit ist $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZF}}(M)$ für alle Mengen M nichtleer.

Die funktionale Klasse $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZF}}$ ist eine Kardinalzahldefinition, aber nicht repräsentierend. Hat $N \in \mathrm{Card}_{\mathrm{ZF}}(M)$ den Rang α, so gilt $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZF}}(M) \subseteq V_{\alpha+1} - V_\alpha$. Die Kardinalität von $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZF}}(M)$ hat mit der Kardinalität von M im Allgemeinen nichts zu tun.

Eine Kardinalzahldefinition benötigt starke Axiome. Ein Satz von Azriel Levy besagt, dass es keine Kardinalzahldefinition in ZF ohne das Fundierungsaxiom gibt [Levy 1969]. Und nach einem Ergebnis von David Pincus gibt es keine repräsentierende Kardinalzahldefinition in ZF [Pincus 1974] (vgl. auch [Kanamori 2006, p. 246]).

Die Frage nach einer Kardinalzahldefinition ist sowohl inhaltlich als auch historisch eng mit der Frage nach einer Ordinalzahldefinition verknüpft. Beide Kardinalzahldefinitionen $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZFC}}$ und $\mathrm{Card}_{\mathrm{ZF}}$ verwenden die Ordinalzahlen: Die erste benötigt die Ordinalzahlen für Mächtigkeitsvergleiche. Die zweite verwendet die Ordinalzahlen zur hierarchischen Anordnung des Universums.

Ein Vergleich mit dem Verhältnis-Begriff

Zu Beginn des Artikels haben wir eine Briefstelle von Leibniz zitiert, in der die Definition eines Verhältnisses „im absoluten Sinn" im Gegensatz zu einer relationalen Definition angesprochen wird. Es ist instruktiv, die Frage nach einer Kardinalzahldefinition mit der Definition von „Verhältnis" zu vergleichen. Wir beschränken uns hier auf die positiven natürlichen Zahlen. Eine relationale Definition lässt sich wie folgt angeben:

> Seien a, b, c, d positive natürliche Zahlen. Dann *verhält sich* a *zu* b *wie* c *zu* d, falls gilt:
>
> $a \cdot d = c \cdot b$

Diese Definition verwendet nur die Multiplikation natürlicher Zahlen. Die Zahl 1 verhält sich zur Zahl 2 wie die Zahl 3 zur Zahl 6, da $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$. Was ein Verhältnis an sich ist, wird nicht definiert. Wir können die relationale Definition als Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge M aller Zahlenpaare auffassen. Für $(a, b), (c, d) \in M$ setzen wir:

$(a, b) \sim (c, d)$, *falls* $a \cdot d = c \cdot b$

Nun gibt es wie bei den Kardinalzahlen im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, Verhältnisse als Objekte einzuführen. Für Zahlen a und b können wir ein *Verhältnis* a/b definieren durch:

a/b = „das $(c, d) \in M$ mit: $(a, b) \sim (c, d)$ und c, d sind teilerfremd"

Diese Definition ist repräsentierend. Alternativ können wir setzen:

$a/b = \{ (c, d) \in M \mid (a, b) \sim (c, d) \}$

Für beide Definitionen gilt $1/2 = 2/4 = 3/6$ usw.

Im Unterschied zu einer Kardinalzahldefinition taucht der interpretierende Schritt auf, Paare (a, b) zu betrachten. Bei den Mächtigkeiten entfällt ein solcher Schritt, die Relation der Gleichmächtigkeit ist für je zwei Mengen erklärt. Andererseits sind bei den Kardinalzahlen keine kanonischen Repräsentanten ersichtlich (wie die „gekürzten Brüche" der Verhältnisse). Und weiter sind die Äquivalenzklassen der zweiten Definition eines Verhältnisses kleine Mengen und keine riesigen echten Klassen.

Die allgemeine Fragestellung

Die Fragestellung betrifft nicht nur Kardinalzahlen (und Ordinalzahlen), sondern beliebige Äquivalenzrelationen auf Klassen:

Allgemeine Objektdefinitionen für Äquivalenzrelationen

Sei A eine Klasse. Weiter sei

$$R \;=\; \{\, (x, y) \mid \varphi(x, y) \,\}$$

eine Äquivalenzrelation auf A. Dann ist eine *Objektdefinition* für R eine funktionale Klasse $F : A \to V$, sodass für alle $x, y \in A$ gilt:

$$F(x) \;=\; F(y) \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \varphi(x, y) \qquad \textit{(Korrektheit)}$$

Ein derartiges F heißt *repräsentierend*, falls $\varphi(x, F(x))$ für alle $x \in A$.

Die Trunkierungsmethode liefert für jede Äquivalenzrelation R auf einer Klasse A eine Objektdefinition $F : A \to V$. Für jedes $x \in A$ sei

$$F(x) \;=\; \{\, y \mid y \text{ hat minimalen Rang mit } \varphi(x, y) \,\}$$

Dies ist auch in ZFC von Interesse. Beispielsweise erhalten wir durch Trunkierung eine Objektdefinition für die Klasse der linear geordneten Mengen unter Isomorphie. Auch mit Auswahlaxiom stehen hier (im Gegensatz zu den Wohlordnungen) keine uniform definierbaren Repräsentanten zur Verfügung. Ein Analogon zur ersten Kardinalzahldefinition existiert für lineare Ordnungen nicht. Das Gleiche gilt in vielen anderen Fällen.

Die Trunkierung können wir als eine ZF-Formalisierung des Ansatzes von Frege und Russell lesen, der eine Objektdefinition einfach durch

$$F(x) \;=\; x/R \;=\; \{\, y \mid \varphi(x, y) \,\} \qquad \textit{(Äquivalenzklassenbildung)}$$

geben möchte. Diese Definition erzeugt im Allgemeinen echte Klassen, sodass F(x) kein Objekt einer Theorie mehr ist, die nur Mengen kennt. Wir diskutieren diesen Ansatz in Abschnitt B3.

Eine Kardinalzahldefinition ist eine Objektdefinition für die Äquivalenzrelation

$$R \;=\; \{\, (x, y) \mid |x| = |y| \,\}$$

auf dem Mengenuniversum V ansehen. Analog ist eine Ordinalzahldefinition eine Objektdefinition für die Äquivalenzrelation

$$R \;=\; \{\, (x, y) \mid x \text{ und } y \text{ sind gleichlange (isomorphe) Wohlordnungen} \,\}$$

auf der Klasse A aller Wohlordnungen.

Die Trunkierung von Scott ist universell einsetzbar, aber nicht repräsentierend. Auch in ZFC gibt es keine Methode, die für jede Äquivalenzrelation eine repräsentierende Objektdefinition liefern würde. Bemerkenswerterweise ist dies in natürlichen Erweiterungen von ZFC möglich:

Universelle repäsentierende Objektdefinitionen

Gibt es eine definierbare Wohlordnung $<$ des Mengenuniversums, wie es in Gödels konstruktiblem Universum L oder in anderen L-ähnlichen Klassenmodellen von ZFC der Fall ist, so gibt es eine kanonische repräsentierende Objektdefinition $F : A \to V$ für eine beliebige durch eine Formel $\varphi(x, y)$ definierte Äquivalenzrelation R auf einer Klasse A. Wir setzen:

$F(x) =$ „das $<$-kleinste y mit $\varphi(x, y)$“ für alle $x \in A$

Eine Theorie wie ZFC + „V = L“ ist damit ein optimaler Rahmen, um die Problemstellung zu behandeln. Wir nehmen immer das (im Sinne der vorliegenden Wohlordnung $<$ des Universums V) *erste* Objekt einer Äquivalenzklasse als Repräsentanten der Klasse.

Eine Objektdefinition F für eine Äquivalenzrelation R auf einer Klasse A verlangt „lediglich“ Korrektheit. Für jedes $x \in A$ kann die Menge F(x) ein beliebiges „Zeichen“ sein, solange äquivalenten Elementen von A (und nur solchen) dasselbe Zeichen zugeordnet wird. Anschauungen über das „Wesen“ oder die „Bedeutung“ der Relation können dabei verloren gehen. Anschauungen über „Größe“ müssen sich in einer Kardinalzahldefinition nicht widerspiegeln, und das Gleiche gilt für „Länge“ und „Ordnungstyp“ einer Wohlordnung bei einer Ordinalzahldefinition. Diese Sicht wurde sowohl für Kardinal- als auch für Ordinalzahlen von Felix Hausdorff bereits im Jahr 1914 formuliert. Bemerkenswerterweise war Hausdorff dabei offenbar gar nicht an formalen Objektdefinitionen interessiert. Er verwendete einfach unspezifizierte „Zahlzeichen“, die einfach da und zudem korrekt sind. Wir kommen in Abschnitt B4 hierauf zurück.

In der axiomatischen Mengenlehre wird eine repräsentierende Objektdefinition bevorzugt, die Trunkierung von Scott gilt als Notlösung. Im Idealfall werden „kanonische Repräsentanten“ gefunden, die leicht zu definieren sind und mit denen sich gut arbeiten lässt. Die von Neumann Ordinalzahlen sind ein Paradebeispiel hierfür. Sie spiegeln für die natürlichen Zahlen sowohl den ordinalen als auch kardinalen Aspekt wider. Ob die Definition $n = \{ 0, \ldots, n - 1 \}$ das „Wesen“ einer natürlichen Zahl n erfasst, kann und will die Mengenlehre nicht beantworten. Entscheidend sind die Eigenschaften der Objekte. Die endlichen von Neumann Ordinalzahlen sind eine Interpretation des Begriffs „natürliche Zahl“ innerhalb der Mengenlehre. Die Definition liefert Repräsentanten für beliebig lange Wohlordnungen. Mehr kann eine Definition nicht leisten.

Nach diesem kurzen Überblick über den „Stand der Dinge“ aus der Sicht der axiomatisch fundierten Mathematik wenden wir uns nun dem anderen Ende der Geschichte zu (sofern sie uns überliefert ist): Den Zahldefinitionen, die wir in der antiken griechischen Mathematik finden. Diese Definitionen sind für sich interessant. Darüber hinaus haben sie, wie wir sehen werden, Cantors Ordinal- und Kardinalzahlen stark beeinflusst.

B1. Die klassischen Zahldefinitionen

In der Griechischen Mathematik sind zwei Zahldefinitionen vorherrschend:

μονάδων σύστημα und πλῆθος ὡρισμένον

Hier bedeutet „Zahl" eine „natürliche Zahl größergleich 1" oder sogar „größergleich 2". Die Eins wurde oftmals nicht zu den Zahlen gezählt (siehe Aristoteles Metaphysik 1088a sowie [Heath 1949, p. 83f], [Gericke 1970, p. 29f]).

Die Zahlen erst mit der Zwei beginnen zu lassen, ist eine bemerkenswerte Ergänzung der modernen Diskussion, ob die Null eine natürliche Zahl ist oder nicht. Nach der von Neumann Definition der Ordinalzahlen wäre es unnatürlich, die Null auszuschließen. Dies verwehrt der Zahlentheorie keineswegs, bei der Eins zu beginnen.

Die Bedeutung und die Unterschiede der beiden Zahldefinitionen ist Gegenstand der Diskussion. Ihre Interpretation wird zudem durch die Übersetzung der Begriffe ins Lateinische oder moderne Sprachen beeinflusst.

Die erste Zahldefinition lässt sich als „System von Einheiten" übersetzen, wobei eine Einheit ein „Punkt ohne Position" und die „Grenze des Wenigen" ist [Becker 1964, p. 34; Heath 2003, p. 38]. Bei Euklid ist eine Einheit das „wodurch jedes Ding das existiert eins genannt wird" [Euklid, Elemente VII. 1]. Platon beschreibt die mathematischen Einheiten als ununterscheidbare und unteilbare Objekte des Denkens (Politeia VII, 525f). Wir verweisen den Leser auf [Szabó 1969, III. 14] für eine genauere Diskussion der mathematischen Einheiten bei Platon und Euklid.

Die zweite Definition bedeutet „begrenzte Vielheit". Dabei ist „Vielheit" eine Anzahl, die in diskrete Teile zerlegt werden kann. Das griechische Wort πλῆτος ist abgeleitet von πολυ „viel". Die übliche Übersetzung von πλῆτος ins Lateinische ist *multitudo*. (Siehe [Gericke 1973, p. 154] für die Verwendungen von πλῆτος in der Mathematik.)

Beide Definitionen finden sich in der „Einführung in die Arithmetik" des Nicomachus von Gerasa um 100 n. Chr. (Buch 1, Kapitel VII). Nicomachus führt sogar noch eine dritte Definition in seinem Buch an, die wir hier noch kurz erwähnen:

ποσότητος χύμα ἐκ μονάδων συγκείμενον

Anicius Boethius übersetzt dies durch „quantitatis acervus ex unitatibus profusus", sodass χύμα als acervus „Haufen, Menge" interpretiert wird [Boethius 1867, p. 13]. Dabei wird χύμα von Nicomachus auch als „Reihe" verwendet (Buch II/X) (siehe auch [Gericke 1970, p. 28]). Martin D'Ooge übersetzt es als „flow" in seiner Ausgabe von 1926. Die dritte Definition beschreibt also eine Zahl in etwa als „Haufen/Reihe/Abfolge" einer Größe, die aus Einheiten zusammengesetzt ist". (Vgl. hierzu [Cantor 1887, p. 252] für Cantors Lesart; siehe weiter auch [Iamblichus 1894, p. 10].)

Iamblichus von Chalcis schreibt in seinem um 300 n. Chr. verfassten Kommentar zu Nicomachus die erste Definition dem Thales zu: Er habe diese aus Ägypten, wo er erzogen wurde, mitgebracht. Die zweite Definition wird bei Aristoteles diskutiert (Metaphysik 1020a). Iamblichus verweist auf Eudoxos. Beide Definitionen sind wahrscheinlich älter als Euklids Definition in den Elementen.

Gericke stellt in seiner Analyse heraus, dass die beiden Definition zwei verschiedenen Methoden des Definierens angehören: Die erste ist ein Beispiel für eine, wir er es mit Verweis auf Hilbert nennt, „generische Definition“, die uns mitteilt, wie ein neues Objekt aus einfacheren Objekten hervorgeht (wie etwa „Ein Tisch ist ein Brett mit vier Beinen.“). Die zweite ist ein Beispiel einer „systematischen Definition“, die uns sagt, wie wir einen umfassenderen Begriff einzuschränken haben (wie etwa „Ein Hund ist Tier mit diesen und jenen Eigenschaften.“) [Gericke 1970, p. 20f; 1973, p. 152].

Gemäß der ersten Definition wird eine Zahl durch das Verbinden von Einheiten erzeugt, durch das ein „System“ (im Singular, also ein Objekt) entsteht. Die ersten realen Zahlrepräsentationen entsteht in dieser Weise: Steine auf dem Fußboden, Striche im Sand, Kerben in einem Stück Holz. Diese Vorstellung ist noch heute lebendig, wenn wir Zahlen darstellungsfrei in der Form

I, II, III, IIII, …

notieren. Ob eine Zahl gemäß dieser Definition mehr ist als eine (Multi-)Menge von Einheiten ist erneut eine Frage der Interpretation. Das griechische Wort σύστημα kann vergleichsweise neutral als „System“ übersetzt werden. Es ist interessant, dass Dedekind „System“ für das verwendet hat, was wir heute als „Menge“ in der Mathematik verstehen [Dedekind 1888, Art. 2]. Der Begriff „Menge“ wurde durch Bolzano und Cantor geprägt. Die heutige Mengenlehre könnte damit auch Systemtheorie heißen.

Die Diskussion der zweiten Definition bei Aristoteles lässt sich als zweifache Restriktion des umfassenderes Begriffs einer *Größe* (ποσόν) auffassen: Zunächst wird *Größe* reduziert auf *diskrete Größe* (πλῆθος), wodurch kontinuierliche Größen ausgeschlossen werden. Nun wird *diskrete Größe* reduziert auf *begrenzte Größe*, wobei das griechische ὡρισμένον die Bedeutungen „bestimmt, begrenzt, definiert“ aufweist. Aristoteles verwendet auch πεπερασμένον anstelle von ὡρισμένον.

Die erste Definition strebt Zahlen als bestimmte ideale Objekte an und lässt sich insgesamt dem Ziel einer kanonischen repräsentierenden Objektdefinition zuordnen. Die zweite Definition lässt eine extensionale Lesart zu, und beschreibt so, in modernisierter Form, die Klasse aller endlichen Mengen. Sie entspricht dem Ansatz von Frege-Russell, wenn wir Cantors Gleichmächtigkeit von Mengen als *principium divisionis* verwenden.

Euklid verbindet beide Definitionen. In seien Elementen definiert er:

Euklid (Elemente)): ’Αριθμὸς τὸ ἐκ μονάδων συνκείμενον πλῆτος. „Zahl ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Vielheit.“ [Euklid, Elemente VII. 2]

Hier sind Bestandteile aus beiden Definitionen zu finden. Da aber Einheiten den Stoff bilden, aus dem die Zahlen gemacht sind, dominiert die erste Definition. Euklids Definition verwendet mit συνκείμενον zudem einen Begriff der dritten Definition bei Nicomachus. Sie erscheint so als Synthese verschiedener Versuche, den Zahlbegriff zu fassen.

Das Begriff „System" taucht bei Euklid nicht mehr auf, und damit scheint Euklids Definition der „internen Struktur" einer Zahl weniger Bedeutung zuzumessen. Die Endlichkeit wird stillschweigend vorausgesetzt. Es ist verführerisch Euklids Definition wie folgt zu modernisieren: „Eine Zahl ist eine endliche aus Einheiten bestehende Multimenge". Wir werden sehen, dass Cantors Definition einer *Kardinalzahl* von 1895 diese Lesart aufgreift. Sie wird die Endlichkeit streichen, dafür aber beschreiben, wie Kardinalzahlen entstehen.

Die klassischen Definitionen wurden im Mittelalter häufig wiederholt und kommentiert. Boethius definiert in seiner „De Arithmetica", einer vagen Übersetzung des Buches von Nicomachus: „numerus est unitatum collectio" [Boethius 1867, p. 13]. Flavius Cassiodorus übersetzt Euklids Definition in seinen „Institutiones" von 562 n. Chr. als: „numerus est ex monadibus multitudo composita" [Cassiodorus 1937, p. 133]. Derartige Formulierungen sind bis in die Moderne Folklore.

Noch älter als der Zahlbegriff ist möglicherweise der Vergleich von diskreten Größen durch Paarbildung. Zwei Herden lassen sich in ihrer Größe vergleichen ohne sie zu zählen: Wir vermindern sie jeweils um eine Einheit auf jeder Seite, was einer Paarbildung entspricht und modern gelesen zu Injektionen, Surjektionen bzw. Bijektionen führt. Die Erfindung und der praktische Erfolg der natürlichen Zahlen mag diese einfache Idee verdrängt haben, aber sie wurde nicht vollständig vergessen. Sie wird im späten Mittelalter in den Arbeiten des Albert von Sachsen diskutiert. Er notiert explizit, dass zwei *Größen* die gleiche Anzahl an Elementen besitzen, wenn es eine vollständige Paarbildung zwischen ihnen gibt [Maier 1949, p. 170f; Gericke 1977, p. 54, 61]. Später erscheint dieser Gedanke in David Humes „Treatise of human nature" (1739/1740), und Frege nimmt hierauf Bezug [Frege 1884, § 63]. Albert von Sachsen diskutiert auch ein unendliches Beispiel:

> Man betrachte einen unendlich langen Holzstamm, schneide wiederholt einen Fuß breite Scheiben ab, und forme diese Scheiben in einer volumenerhaltenden Art und Weise zu einer immer größer werdenden Kugel, sodass die Scheiben zu Kugelschichten werden.

Dadurch wird eine Bijektion zwischen dem Holzstamm und dem dreidimensionalen Raum erzeugt. Das das Volumen des Holzstamms unendlich und die Verformung der Scheiben volumenerhaltend ist, kann die entstehende Kugel keinen endlichen Radius besitzen. Derartige Beispiele waren im späten Mittelalter populär, und es ist nicht bekannt, wer sie gefunden hat. Sie sind Teil einer umfassenden Diskussion über *Unendlichkeit* (ἄπειρον). Einige als paradox empfundene Phänomene wurden svon Galileo und Bolzano aufgegriffen [Galileo 1638; Bolzano 1851, § 20]. Viele Schlussfolgerungen waren dabei voreilig und fehlgeleitet durch das klassische Prinzip, dass das Ganze immer größer sei als jeder seiner echten Teile. Die Phänomene des Unendlichen wurden in ihrem mathematischen Reichtum erst erkannt, als Cantor 1874 die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen entdeckte und 1878 den allgemeinen Begriff der der relationalen Gleichmächtigkeit formulierte. Zuvor gab es „Unendlich“ nur als ein unstrukturiertes Ganzes mit paradoxen Eigenschaften und nicht sichtbarer Theorie.

Wir besprechen Cantors vielfältige Überlegungen zu Mächtigkeiten im Detail in Abschnitt C. Hier wenden wir uns direkt seiner abschließenden Definition von *Kardinalzahl* aus dem Jahr 1895 zu.

B2. Cantors Definition in den „Beiträgen“ von 1895

Cantors Abhandlung beginnt mit seiner denkwürdigen Definition des Mengenbegriffs. Da die Details dieser Definition für seinen Kardinalzahlbegriff relevant sind, wiederholen wir sie hier einmal mehr:

Cantor (1895): “Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“ [Cantor 1895, p. 481]

Cantor wusste zu diesem Zeitpunkt sehr gut, dass das naive Komprehensionsschema widersprüchlich war. Eine Diskussion oder auch nur kurze Erwähnung der Problematik einer „Zusammenfassung, die kein Ganzes mehr bildet“ fehlt in seinem Artikel. Verständlicherweise, wird man sagen. Wer beginnt gerne eine Darstellung mit dem Satz: „Wir untersuchen unendliche Mengen. Die damit verbundenen logischen Schwierigkeiten besprechen wir zu einem späteren Zeitpunkt.“ Eine derartige Diskussion hätte, mehrere Jahre vor Russell und Zermelo, die Geschichte der Mathematik verändert. Aber seine Mengendefinition lässt sich auch nicht so lesen, als wäre *jede* Zusammenfassung von Objekten zu einem neuen Objekt möglich. Der Zusatz „zu einem Ganzen“ ist von großer Bedeutung. Cantor verwendet „absolut unendlich“ im Gegensatz zu „transfinit“ bereits 1883 [Cantor 1883b, p. 587f; 1884x, p. 86]. Wir kommen in Abschnitt C darauf zurück (vgl. zudem auch [Cantor 1991, p. 388f, 425f; Purkert 1986; Tait 2000]). Cantor hat – so wie Generationen vor ihm die „Paradoxien des Unendlichen“ entdeckt hatten – die „Paradoxien der echten Klassen“ entdeckt. Beide Phänomene sind heute so weit untersucht und axiomatisch gezähmt, dass keine Widersprüche mehr zu sehen sind.

Das philosophische Paar „Anschauung und Denken“ zeigt die Reichweite von Cantors Mengenbegriff. Mengen sind hier noch nicht, wie es heute üblich ist, auf die Mathematik beschränkt. Sie umfassen Beispiele von „Die Finger meiner beiden Hände“ (Anschauung) ebenso wie „Die natürlichen Zahlen“ (Denken) [Cantor 1887, p. 118f].

Cantors „Anschauung“ entspricht dem philosophischen Begriff seiner Zeit. In Rudolf Eisler’s Philosophischem Lexikon von 1904 heißt es:

Eisler (1904): “Anschauung (Intuition) ist die unmittelbare (nicht durch Begriffe und Schlüsse vermittelte) Erfassung eines konkret gegebenen Objektes in dessen (räumlich-zeitlicher) Bestimmtheit.“ [Eisler 1904, Stichwort: Anschauung]

Cantors Verwendung von „wohlunterschieden“ ist ein weiteres philosophisches Merkmal seiner Definition, das auf heutige Mathematiker irritierend wirken kann. Wir können diesen Zusatz nicht als Extensionalitätsaxiom lesen, wie Cantors Definition einer Kardinalzahl (und andere Definitionen) zeigen. „Wohlunterschieden“ scheint hier Mengen wie „Die Wassertropfen in diesem See.“ auszuschließen.

Gleich im Anschluss an seine Mengendefinition, und bemerkenswerterweise vor seiner relationalen Definition der Gleichmächtigkeit $|M| = |N|$ zweier Mengen, bringt Cantor seine abschließende Definition von *Mächtigkeit* oder äquivalent *Kardinalzahl*:

Cantor (1895): „‚Mächtigkeit‘ oder ‚Cardinalzahl‘ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Das Resultat dieses zweifachen Abstraktionsacts, die Cardinalzahl oder Mächtigkeit von M, bezeichnen wir mit

(3) $\overline{\overline{M}}$

Da aus jedem einzelnen Elemente m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine ‚Eins‘ wird, so ist die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellectuelles Abbild oder Projection der gegebenen Menge M in unserm Geiste Existenz hat.“ [Cantor 1895, p. 481]

Eine bemerkenswerte Definition. Wir wissen heute, dass eine Kardinalzahldefinition eine nichttriviale Aufgabe ist. Cantor musste, ob er es wollte oder nicht, Intuitionen und Bilder verwenden. Die Definition der relationen Gleichmächtigkeit wäre unproblematisch gewesen. Er versuchte sich dagegen mutig an einer Kardinalzahldefinition, die traditionelle mathematische und philosophische Vorstellungen aufgriff. Er wusste von Freges Rezension von 1892 nur zu gut, dass diese Definition scharfe Kritik hervorrufen kann [Cantor 1885]. Aber Cantor hatte mathematische Struktur gefunden, und er tat, was er konnte, um die grundlegenden Objekte seiner Untersuchungen zu beschreiben. Die Reaktionen seiner mathematischen Fachkollegen waren auch, in den meisten Fällen, diesem Vorgehen nicht feindlich gesinnt (vgl. Abschnitt C). In der Mathematik gibt es zahlreiche Fälle, in denen zunächst entdeckt und erst viel später präzisiert wird – wenn man weiß, dass es sich lohnt, und wenn man soweit gekommen ist, dass man sieht, wie eine Präzisierung aussieht. Prominente Beispiele sind die komplexen Zahlen (präzisiert als Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$) und die Infinitesimalrechnung (präzisiert ohne infinitesimale Größen). Die Mathematik ist in diesem Sinne experimenteller und stürmischer als man bei all ihrem Streben nach Exaktheit denken könnte. Der Entdeckungsprozess kann in der Mathematik recht lange dauern – gerade bei neuen Zahlen. Während dieses Prozesses kommt es mehr auf gefundene Struktur an als auf ultimative begriffliche Präzision. Aus diesem Grund sind diese Perioden auch aus historischer Sicht so attraktiv.

Die Besonderheiten der Definition zeigen, dass die Cantorsche Mengenlehre eine Welt für sich ist. Eine Welt, die sehr verschieden ist von der, die die nachfolgende Generation aus Cantors Erbe geformt hat. Mit den Augen von ZFC gelesen hat Cantor Kardinalzahlen nur mehr oder weniger anschaulich beschrieben. In ZFC kann Cantors Definition nur recht künstlich interpretiert werden, etwa in der Form $\{ (1, \alpha) \mid \alpha < \kappa\}$, wobei κ eine Kardinalzahl im üblichen Sinne von ZFC ist. Die ununterscheidbaren Einheiten gehen dabei verloren. Die Cantorschen Kardinalzahlen gehören, wie die Cantorschen Ordinalzahlen, die analog als als wohlgeordnete „Mengen" von Einheiten definiert werden, nicht zu ZFC.

Es erscheint dem Autor voreilig, derartige Definitionen als *vage* in einem absoluten Sinne zu bezeichnen. In [Deiser 2006] werden zwei axiomatische Theorien entwickelt, die versuchen, Cantors Definitionen von Ordinal- und Kardinalzahlen formal zu realisieren. Vgl auch [Fine 1998].

Wir wollen die Definition noch genauer untersuchen. Zunächst werden Kardinalzahlen als *Allgemeinbegriff* bezeichnet, wodurch die umfangreiche Debatte der antiken und scholastischen Philosophie über *Universalien* aufgegriffen wird, also den ontologischen Status dessen, was verschiedenen Dingen gemeinsam ist [Aristoteles, Metaphysik 1038b]. Cantors Allgemeinbegriff bezieht sich auf spezielle Objekte, auf *Mengen bestehend aus Einheiten*. Damit ist Cantors Mengenbegriff nicht extensional. Die Präsenz von Euklids Definition einer natürlichen Zahl ist offensichtlich. Wir werden in Abschnitt C genauer nachweisen, dass die Verwendung von Einheiten, die den größten Unterschied zwischen Cantors Kardinalzahlen und Kardinalzahlen in ZFC darstellt, eine Fortsetzung und Erweiterung der antiken Tradition ist. Cantor stützte sich auf die klassischen Zahldefinitionen. Seine Kardinalzahldefinition brauchte Zeit, um zur Reife zu gelangen, blieb dabei aber im Wesentlichen unverändert. Es gibt keine zwei grundsätzlich verschiedenen Definitionen von „Kardinalzahl" bei Cantor.

Cantors Definition setzt die von Euklid fort, aber sie informiert uns nicht nur, was Kardinalzahl sind, sondern dass sie durch *Abstraktion* entstehen. Die Abstraktion als eine Methode zur Erkenntnis von Allgemeinbegriffen ist ein Gedanke der scholastischen und speziell der Thomistischen Philosophie, mit der Cantor gut vertraut war [Cantor 1887, p. 118 and 264]. Der Begriff „Abstraktion" wurde von Boethius eingeführt als Übersetzung von ἀφαίρεσις bei Aristoteles. Das griechische Verb ἀφαίρεω bedeutet „ich nehme weg".

Siehe auch [Prantl 1955, vol. III, p. 94f, p. 107ff], [Scholz / Schweitzer 1935, p. 6f] und [Ritter et al. 1971, „Abstraktion"].

Die Abstraktion wird in der scholastischen Philosophie als eine Fähigkeit des „intellectus agens“ beschrieben. Dies spiegelt sich direkt in Cantors „actives Denkvermögen“ wider.

Cantors Kardinalzahlen werden in zwei Schritten gewonnen, die durch die Doppelstrich-Notation angezeigt werden: Zuerst abstrahieren wir von der Natur der Elemente einer Menge. Dies hinterlässt eine möglicherweise noch geordnete Menge von Einheiten, die mit einem einfachen Strich über M bezeichnet wird. In einem zweiten Schritt nehmen wir die Ordnung weg, sodass wir schließlich bei einer ungeordneten Menge bestehend aus ununterscheidbaren Einheiten ankommen. Cantors Definition ist (im nicht formalen Sinn) repräsentierend: Die Kardinalität einer Kardinalzahl κ ist erneut κ. Es gibt nichts mehr, von dem wir abstrahieren könnten.

Eine weitere Schicht der Definition wird dadurch gegeben, dass eine Kardinalzahl als „intellectuelles Abbild oder Projection … in unserm Geiste Existenz hat.“ Falls *Allgemeinbegriff* und *Abstraktion* einen heutigen mathematischen Leser irritiert haben, so können diese Besonderheiten nun Stirnrunzeln auslösen. Wir müssen aber gar nicht in den mittelalterlichen oder modernen Disput über Universalien einsteigen, sondern wir können die Existenz „in unserem Geiste“ einfach so lesen, dass Kardinalzahlen stets der Welt des Denkens angehören, unabhängig davon, ob die Menge, die zur Bildung der Kardinalzahl verwendet wird, der Welt der Anschauung oder der Welt des Denkens angehört (vgl.hierzu auch Dedekinds Definition einer natürlichen Zahl, die wir unten besprechen). Und dass eine Kardinalzahl als ein „Abbild oder Projection“ beschrieben wird, verweist auf eine Bijektion zwischen einer Menge M und ihrer Kardinalzahl. Cantor wird diese Bijektionen in seinem Artikel verwenden, um die Korrektheitseigenschaft zu beweisen. Aus der Sicht von ZFC entsteht bei der „Messung“ der Kardinalität einer Menge M ebenfalls eine Bijektion $f : M \to \kappa$. Im Unterschied zu Cantor werden die Elemente von M mit Hilfe der Ordinalzahlen durchgezählt. Lesen wir die Bijektion als Abstraktion, so werden die Elemente von M nicht wie bei Cantor durch Einsen, sondern durch Ordinalzahlen ersetzt.

Die Beschreibung als „Abbild oder Projection“ ist auch aus axiomatischer Sicht von Bedeutung: Cantors Kardinalzahlen erscheinen als Wertebereich einer Funktion. Damit sind Kardinalzahlen „ein Ganzes“. Sie sind Mengen und keine echten Klassen oder „inkonsistente Vielheiten“, wie Cantor sie nannte. Cantor hat 1898 in einem Brief an Hilbert ein Ersetzungsaxiom formuliert [Cantor 1991, p. 396]. Der Abstraktionsprozess selbst liest sich aus heutiger Sicht als echte funktionale Klasse.

Insgesamt überträgt die Definition ein beträchtliche Maß an Intuition auf den Leser. Sie ist reich an Information wie Tradition. Cantor illustriert sie weiter durch einen Beweis der Korrektheitseigenschaft, die er als von grundlegender Wichtigkeit einstuft [Cantor 1895, p. 482]. Sein Argument lautet wie folgt: Formen wir die Kardinalität κ einer Menge M, so ergibt sich wie bereits gesehen eine Bijektion f zwischen M und κ, wobei κ eine Menge aus Einsen ist. Jedes Element von M wird dabei auf eine bestimme Einheit in κ abgebildet. Ist nun g eine Bijektion zwischen einer Menge N und M, so zeigt die Verknüpfung $g \circ f$, dass die Kardinalität von N ebenfalls gleich κ ist. Haben umgekehrt M und N beide die

Kardinalität κ, so gibt es eine Bijektion f von M nach κ und eine Bijektion g von N nach κ. Dann ist $f^{-1} \circ g$ eine Bijektion von N nach M, sodass $|N| = |M|$ im relationalen Sinn.

Der explizite Verwendung von „Abstraktion“ in einer mathematischen Defintion scheint ihren Ursprung in Cantors unpublizierter Arbeit von 1884 zu haben (siehe Abschnitt C). Definitionen durch Abstraktion wurden später von Peano, Russell, und anderen diskutiert [Russell 1903, chapter XI]. Es ist interessant, dass Dedekind in seiner Abhandlung „Was sind und was sollen die Zahlen?“von 1888 die natürlichen Zahlen ebenfalls durch Abstraktion definiert hat:

Dedekind (1888): „Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffaßt, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zueinander gesetzt sind, so heißen diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen oder auch schlechthin Zahlen, und das Grundelement 1 heißt die Grundzahl der Zahlenreihe N. In Rücksicht der auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraktion) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen.“ [Dedekind 1888, Art. 73]

Dies wird weiter erhellt durch einen Brief von Dedekind an Heinrich Weber vom 24. Januar 1880:

Dedekind (1880): „… so möchte ich doch rathen, unter der Zahl (Anzahl, Cardinalzahl), lieber nicht die Classe (das System aller einander ähnlichen endlichen Systeme) selbst zu verstehen, sondern etwas Neues (dieser Classe Entsprechendes), was der Geist erschafft. Wir sind göttlichen Geschlechtes und besitzen ohne jeden Zweifel schöpferische Kraft nicht blos in materiellen Dingen (Eisenbahnen, Telegraphen), sondern ganz besonders in geistigen Dingen.“ [Dedekind 1932, vol. III, p. 489]

Obwohl Cantor Dedekinds „freien Schöpfungen“ skeptisch gegenüber stand, so teilte er mit Dedekind doch einen Abneigung gegenüber der Klassendefinition $|M| = \{ N \mid |N| = |M| \}$ [Cantor 1883b, p. 562; 1991, p. 427]. Im Gegensatz zu Cantor waren Dedekind die Widersprüche der naiven Komprehension offenbar unbekannt (siehe Cantors Briefe an Hilbert vom 15. November 1899 und 27. Januar 1900 [Cantor 1991, p. 414f, 425f]).

B3. Die Definitionen von Frege und Russell

1884 / 1885 / 1892 – Freges Definition und der Streit mit Cantor

In seinem Buch „Die Grundlagen der Arithmetik“ von 1884 definiert Frege Kardinalzahlen („Anzahlen“) wie folgt:

Frege (1884): „… Ich will der Kürze wegen den Begriff F dem Begriffe G gleichzahlig nennen, wenn diese Möglichkeit [die unter den einen den unter den anderen Begriff fallenden Gegenstände beiderseits eindeutig zuzuordnen] vorliegt, muss aber bitten, dies Wort als eine willkührlich gewählte Bezeichnungsweise zu betrachten, deren Bedeutung nicht der sprachlichen Zusammensetzung, sondern dieser Festsetzung zu entnehmen ist.

Ich definire demnach:
die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang*) des Begriffes ‚gleichzahlig dem Begriffe F‘.“ [Frege 1884, § 68]

In der Fußnote „*)“ zu „Umfang“ spricht sich Frege für die Identifikation von „Begriff“ und „Umfang des Begriffes“ aus.

In der heutigen mengentheoretischen Sprache formuliert definiert Frege die Kardinalität einer Menge M als die Klasse aller zu M gleichmächtigen Mengen. Die Probleme dieser Definition diskutieren wir im Kontext von Russells Rezeption der Ideen von Frege.

Cantor schrieb eine Rezension über die „Grundlagen“ von Frege. Sie erschien im Mai 1885 und kritisiert Freges Anzahl-Definition:

Cantor (1885): „Weniger erfolgreich dagegen scheint mir sein eigener Versuch zu sein, den Zahlbegriff streng zu begründen. Der Verf[asser] kommt nemlich auf den unglücklichen Gedanken – und es scheint, dass er dabei einer Andeutung Ueberwegs in dessen ‚System der Logik‘ § 53 gefolgt ist –, dasjenige, was in der Schullogik der ‚Umfang eines Begriffes‘ genannt wird, zur Grundlage des Zahlbegriffs zu nehmen; er übersieht ganz, dass der ‚Umfang eines Begriffs‘ quantitativ im allgemeinen etwas völlig Unbestimmtes ist; nur in gewissen Fällen ist der ‚Umfang eines Begriffs‘ quantitativ bestimmt, dann kommt ihm allerdings, wenn er endlich ist, eine bestimmte Zahl und, falls er unendlich ist, eine bestimmte Mächtigkeit zu. Für eine derartige quantitative Bestimmung des ‚Umfangs eines Begriffs‘ müssen aber die Begriffe ‚Zahl‘ und ‚Mächtigkeit‘ vorher, von anderer Seite her bereits gegeben sein und es ist eine Verkehrung des Richtigen, wenn man unternimmt, die letzteren Begriffe auf den Begriff ‚Umfang eines Begriffs‘ zu gründen.“ [Cantor 1885, col. 728]

Die Referenz „§ 53“ ist [Ueberweg 1882, p. 140f.].

Da Frege die relationale Definition von Mächtigkeit für „gleichzahlig“ verwendet, ist Cantors logischer Einwand nicht gültig, und dies erweckt den Eindruck, dass Cantor Frege falsch gelesen hat. Frege wiederholte seine Definition in seiner Antwort auf Cantors Rezension von 1885, um, wie er schreibt, ein Missverständnis zu klären [Frege 1967, p. 112]. Eine unterschiedliche Interpretation von Cantors Rezension findet sich in [Tait 1996]: Cantor könnte hier auf seine Entdeckung von 1883 hinweisen, dass der Begriff „transfinite Zahl" eine „absolut unendliche" Extension besitzt und daher quantitativ unbestimmt ist. Wir werden in Abschnitt C eine Passage aus dem unveröffentlichten Cantorschen Artikel von 1884 diskutieren, die zeigt, dass Cantor das Phänomen des „absolut Unendlichen" zu dieser Zeit beschäftigte. Damit lässt sich gegen die Interpretation des „Missverständnisses" von Freges Anzahlbegriff argumentieren. Andererseits scheint jede derartige Lesart den Text der Rezension zu überladen. Die Rezension erschien in einem literarischen Journal und wir dürfen annehmen, dass sie als allgemeinverständlich intendiert war.

In seiner Rezension bringt Cantor auch eine Version seines eigenen Mächtigkeitsbegriffs:

Cantor (1885): „Ich halte es daher auch nicht für zutreffend, wenn der Ver. in § 85 die Meinung ausspricht, dasjenige, was ich ‚Mächtigkeit' nenne, stimme mit dem überein, was er ‚Anzahl' nennt. Ich nenne ‚Mächtigkeit eines Inbegriffs oder einer Menge von Elementen' (wobei letztere gleich- oder ungleichartig, einfach oder zusammengesetzt sein können) denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle Mengen, welche der gegebenen Menge äquivalent sind, und nur diese fallen." [Cantor 1885, col. 728/729]

Hier hat Cantor recht, unabhängig davon, ob er Freges Anzahl-Definition missverstanden hat oder nicht. Cantor erläutert seinen „Allgemeinbegriff" nicht weiter, aber ist es geht klar aus seinen früheren und späteren Schriften hervor, dass er Freges extensionale Definition der Mächtigkeit ablehnt (und folglich fundamentale Unterschiede zu seiner eigenen Definition sieht).

Frege wiederholte in seiner Antwort auf Cantors Rezension (und zudem weniger eindeutig in seiner eigenen Rezension von 1892), dass Cantors Kardinalzahldefinition von 1885 mehr oder weniger seine eigene sei [Frege 1967, p. 112]. Viele Autoren stimmen hier mit Frege überein (siehe etwa [Zermelo 1932, p. 441f], [Scholz / Schweitzer 1935, p. 17], [Fraenkel 1961, p. 61], [Felgner 2002, p. 634f]). Wir möchten dagegen für eine andere Bewertung argumentieren. In seiner Antwort auf Cantors Rezension schreibt Frege:

Frege (1967): „Die Abweichung, daß Herr Cantor ‚Allgemeinbegriff' sagt, wo ich ‚Umfang des Begriffs' sage, erscheint … als eine Unwesentliche" [Frege 1967, p. 112].

Die Abweichung ist, wie das Phänomen der echten Klassen zeigt, alles andere als unwesentlich. Cantors *Allgemeinbegriff* setzt die antike und scholastische Tradition fort, und diese traditionellen Allgemeinbegriffe sind keine Begriffsumfänge. Cantors Kardinalzahldefinition der Rezension von 1885 ist ein Fragment der Definition von 1895, aber keine wirklich verschiedene Definition. Cantors Kardinalzahldefinitionen vor 1885 unterstützen dieses Sicht (siehe Abschnitt C).

Frege rezensierte umgekehrt Cantors Abhandlung „Zur Lehre vom Transfiniten“ aus dem Jahr 1890. Diese Abhandlung enthält Essays, die zwischen 1886 und 1886 in einem philosophischen Journal erschienen waren. Die Rezension von Frege ist sehr scharf, und er beschwert sich darin über Cantors Rezension seines eigenen Buches. Zudem kritisiert er Cantor erneut für seine Kardinalzahldefinition. Sie stimmt nun, mit kleineren Abweichung, mit der finalen Version von 1895 überein:

Frege (1892): „Wenn Herr Cantor meine ‚Grundlagen der Arithmetik‘ nicht nur rezensiert, sondern auch mit Nachdenken gelesen hätte, so würde er viele Fehler vermieden haben … Herr Cantor wiederholt (S. 13) eine Definition als sein geistiges Eigentum, die er in der Rezension meines Buches gegeben hatte. Sie schien mir damals von meiner eignen nur unwesentlich in den Ausdrücken verschieden zu sein, was ich auch in einer Erwiderung aussprach, und ich konnte denken, er sei durch eigne Arbeit zu wesentlich gleichem Ergebnisse gelangt wie ich selber. Jetzt sehe ich, daß die in meinem Buche ausgesprochenen Wahrheiten doch nicht so auf der Straße lagen, daß man sich nur zu bücken brauchte, um sie sich anzueignen. Herr Cantor gibt nämlich noch andere Definitionen (S. 23 und S. 56), die zeigen, daß er noch ganz auf einem veralteten Standpunkte steht.“ [Frege 1967, p. 164]

Dies ist zweideutig formuliert: Wirft Frage Cantor ein Plagiat vor? Oder behauptet er lediglich, dass Cantor eine Definition verwendet, die ihm altmodisch erscheint? Die Antwort scheint ein „ja“ auf beide Fragen zu sein. Das ja auf die erste Frage wird durch das sarkastische „als sein geistiges Eigentum“ und „andere Definitionen“ gestützt. Das „ja“ auf die zweite Frage durch „damals“ and „jetzt sehe ich“.

Frege fährt mit einer Kritik an der Cantorschen „Abstraktion“ und seinen „Einheiten“ fort:

„… Er verlangt unmögliche Abstraktionen und ist im unklaren darüber, was unter ‚Menge‘ zu verstehen ist … Nur um meine Behauptung nicht ganz ohne Begründung zu lassen, führe ich an, daß hier natürlich wieder jene unglücklichen Einsen vorkommen, die verschieden sind, obgleich sie sich voneinander durch nichts unterscheiden …

Was nun die Ordnungszahlen und Ordnungstypen anbelangt, so kann ich ihre Begründung, die Herr Cantor gibt, ebensowenig wie die der Kardinalzahlen als ausreichend anerkennen. Er gibt an, wie man abstrahieren müsse, um sie zu erhalten. Aber eine solche Angabe kann nicht als Definition gelten; denn entweder wird das zu Definierende dabei dabei als bekannt vorausgesetzt, oder es wird nicht eindeutig bestimmt, falls die Abstraktion überhaupt ausführbar ist, und das ist sie hier nicht einmal. Auch ist das Wort ‚abstrahieren‘ ein psychologischer Ausdruck, der als solcher in der Mathematik zu vermeiden ist. Damit will ich aber nicht leugnen, daß sich das, was Herr Cantor fassen will, einwandfrei definieren lasse. Welche Bedeutung die Ordnungstypen für die Mathematik dann erhalten würden, läßt sich wohl noch nicht übersehen. Vielleicht gewinnen sie einen engern Zusammenhang mit der übrigen Mathematik und wirken befruchtend auf sie ein. Ich möchte das nicht für ausgeschlossen halten.“ [Frege 1967, p. 164 f]

Dass Cantor, der zu diesem Zeitpunkt die Mengenlehre der reellen Zahlen zu einer Theorie mit enormer Wirkungsgeschichte ausgebaut hatte und darüber hinaus das heutige Bild der Ordinal- und Kardinalzahlen einschließlich des Phänomens der echten Klassen klar vor Augen hatte, als altmodischer Herr gezeichnet wird, der im Gegensatz zu Frege leider immer noch nicht so recht weiß, was eine „Menge" ist, kann unkommentiert bleiben. Frege diskrediert sich hier selbst. Wie gut, dass es die Mathematik gibt.

Die meisten Mathematiker reagierten weniger kritisch auf Cantors Ordinal- und Kardinalzahlen (vgl. [Ziehen 1917, p. 23 f]). Sie untersuchten den mathematischen Reichtum dieser Begriffe, die durch Cantors Arbeiten über „unendliche Punktmannigfaltigkeiten" in den 1880er Jahren offenbar wurden.

Mathematische Struktur kann und darf, wie wir bereits oben argumentiert haben, ohne formale Definitionen entdeckt und untersucht werden. Wenn das kleine „dann" im drittletzten Satz der zitierten Passage als Forderung zu verstehen ist, dass ein Begriff präzise definiert werden muss, bevor ihm eine wichtige Stellung in der Mathematik zukommt, so ist es schädlich für die Mathematik. Wie viel wäre verloren gewesen, hätten die mathematischen Journale Cantors und später auch Hausdorffs Arbeiten abgelehnt, weil sie keine präzisen Definitionen von Kardinalzahlen, Ordinalzahlen und Ordnungstypen enthielten. Die nicht erfolgte Veröffentlichung der *einen* Cantorschen Arbeit von 1884 hat schon genug Schaden angerichtet. Man kann Frege zugutehalten, dass er durch Cantors Rezension seines Buches verletzt war. Der sehr polemische Entwurf zu seiner „Retour-Rezension" unterstützt den Eindruck, dass Freges Reaktion emotional aufgeladen war [Frege 1983, p. 79 f]. Und schließlich hat der Abschluss der zitierten Passage einen versöhnlichen Ton.

1903 – Russells „Principles of Mathematics"

In seinen „Principles of Mathematics" diskutiert Bertrand Russell in Kapitel X „The Contradiction" die heute nach ihm benannte Paradoxie. Sie zeigt, dass das volle Komprehensionsschema inkonsistent ist. Eine inkonsistente Instanz des Schemas ist die „Russell-Klasse"

$$R = \{ x \mid x \notin x \}$$

Zermelo hat diese Paradoxie unabhängig von Russell entdeckt [Ebbinghaus 2007, p. 45 f].

Im folgenden Kapitel XI „Definition of Cardinal Numbers" kritisiert Russell „definitions by abstraction" wie sie in den Schriften von Peano zu finden sind (vgl. [Scholz / Schweitzer 1935, p. 35 f] zu Peanos Definitionen durch Abstraktion). Russell schlägt vor:

Russell (1903): „The other remedy is more practicable, and applies to all the cases in which Peano employs definition by abstraction. This method is, to define as the number of a class the class of all classes similar to the given class. Membership of this class of classes (considered as a predicate) is a common property of all the similar classes and of no others; moreover every class of the set of similar classes has to the set a relation which it has to nothing else, and which every class has to its own set. Thus the [above] conditions are completely fulfilled by this class of classes, and it has the merit of being determinate when a class is given, and of being different for two classes which are not similar. This, then, is an irreproachable definition of the number of a class in purely logical terms.“ [Russell 1903, p. 115]

Dies ist die Frege-Russell-Definition einer Kardinalzahl (deren Idee, wir oben bei Cantors Verweis auf Ueberweg gesehen haben, schon länger im Umlauf war). Für eine beliebige Menge setzen wir

$$|M|^{FR} = \{ N \mid |N| = |M| \}.$$

In ZFC ist die Klasse $|M|^{FR}$ in allen nichttrivialen Fällen echt (für $M = \emptyset$ ist $|M|_{FR} = \{\emptyset\}$). Denn für $M \neq \emptyset$ hat die Klasse Elemente beliebig mit beliebig hohem Rang in der von Neumann Hierarchie, sodass sie keine Menge ist. Tatsächlich genügen das Paarmengenaxiom, das Aussonderungsschema und das Vereinigungsaxiom,u m zu zeigen, dass die Frege-Russell Kardinalzahl Eins nicht existiert, d.h.

$$E = \{ \{ x \} \mid x = x \}$$

ist kein Objekt der Theorie. (Hier um im Folgenden bedeutet „$\{ x \mid \varphi(x) \}$ existiert“: $\exists y \, \forall x \, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$.) Denn andernfalls würde

$$R = \bigcup \{ \{ x \} \in E \mid x \notin x \}$$

nach Aussonderung und Vereinigung existieren. Da das Paarmengenaxiom für alle x die Existenz der Einermenge $\{ x \}$ garantiert, folgt

$$R = \{ x \mid x \notin x \}$$

Aber die Russell-Klasse $\{ x \mid x \notin x \}$ existiert in keiner Axiomatik der $\in$-Sprache (sie ist rein logisch).

Ironischerweise können wir also gegen Russells Selbstbewertung einer „irreproachable definition of a cardinal“ doch einen logischen Einwand vorbringen: Sie ist inkonsistent, wie durch Russells logisch einwandfreie Analyse der Komprehension gezeigt wird. Die Probleme der Russell-Frege-Definition wurden bereits 1905 von Hausdorff in seiner Rezension der „Principles“ angesprochen [Hausdorff 1905]. Russell hat später siene Typentheorie verwendet, um die Widersprüche seiner Kardinalzahldefinition zu vermeiden.

Die Russell-Frege-Definition lässt sich in der modernen Mengenlehre durch Scotts Trunkierungsmethode interpretieren: Echte Klassen können mit Hilfe der von Neumann-Hierarchie uniform zu Mengen zurückgeschnitten werden. Das Heilmittel von Frege-Russell zum formal untadeligen Umgang mit allerlei Abstraktionen funktioniert, aber nur in einer verfeinerten Version innerhalb eines einigermaßen starken axiomatischen Rahmens. Es steht auch diesem Ansatz – wie den Cantorschen Kardinalzahlen – zu, erst entdeckt und untersucht und erst später präzisiert bzw. repariert zu werden. Die Bewertung der Untadeligkeit sollte man aber vielleicht besser anderen überlassen.

B4. Der Weg zu den modernen Definitionen

1900 / 1901 – Frühe Vereinfachungen von Cantors Definition

Unbeeindruckt von Freges Kritik folgten die Mengentheoretiker in den zwei folgenden Jahrzehnten Cantors Abstraktion. Dabei lässt sich eine kontinuierliche Reduzierung der Definition beobachten. Speziell wurden die Cantorschen Einsen entfernt. Wir diskutieren verschiedene Beispiele.

Arthur Schoenflies bereinigt bereits 1900 in seinem „Bericht" Cantors Definition:

Schoenflies (1900): „Mächtigkeit von M heißt der Allgemeinbegriff, der aus M dadurch hervorgeht, daß von der Beschaffenheit und Ordnung der Elemente abstrahiert wird." [Schoenflies 1900, p. 4]

In den Notizen von Zermelo zu seiner Mengenlehre-Vorlesung im Winter 1900/1901 in Göttingen (wohl der ersten Vorlesung dieser Art überhaupt) findet sich eine durchgestrichene Definition von Kardinalzahl und eine verbesserte Version:

Zermelo (1900/01): „Abstrahiert [man] bei einer vorgelegten Menge von der Beschaffenheit und der Anordnung ihrer Elemente bei festgehaltener Verschiedenheit, so heißt der entstehende Allgemeinbegriff die ‚Mächtigkeit der Menge'." [Durchgestrichen]

„Die Mächtigkeit oder Cardinalzahl einer Menge entsteht durch Abstraktion, indem man absieht von jeder Beschaffenheit und Anordnung der Elemente, bei festgehaltener Verschiedenheit." [verbesserte Version] [Zermelo 1900/01]

Das Notizbuch ist skizzenhaft, voller späterer Zusätze und zum Teil in einer heute kaum mehr lesbaren Kurzschrift verfasst (vgl. [Ebbinghaus 2007], [Deiser 2010]). Im Gegensatz zu Schoenflies verschwindet „Allgemeinbegriff" in der zweiten Version bei Zermelo. Es gibt keine Einheiten, die Abstraktion ist geblieben. Was genau sie hinterlässt, bleibt unklar. Die Korrektheitseigenschaft wird von Zermelo ohne Beweis festgehalten. Bei Schoenflies erscheint sie als Definition der Gleichheit zweier Kardinalzahlen.

Cantors Definition in ihrer reduzierten Form „durch Abstraktion" wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts oft wiederholt. Der Begriff einer Kardinalzahl schien sich dabei nicht weiterzuentwickeln. In Hessenbergs Abhandlung „Grundbegriffe der Mengenlehre" von 1906 wird Cantors Abstraktionsprozess nicht erwähnt. Kardinalzahlen sind unmittelbar nach der relationalen Definition der Gleichmächtigkeit zweier Mengen einfach vorhanden, und Analoges gilt für Ordinalzahlen [Hessenberg 1906, §§ 11, 16, 24, 31, 39, 40, 50]). Ein gewisses Problembewusstsein wird in folgender Passage sichtbar:

Hessenberg (1906): „Eine Ordnungszahl μ ist als gegeben anzusehen, wenn eine Menge M bekannt ist, der sie zukommt. Die Aussage, daß eine Menge N nach der Zahl μ oder dem Typus μ geordnet sei, behauptet dann nichts anderes, als daß N zu M ähnlich ist." [Hessenberg 1906, § 40]

In seinem Aufsatz zur Mengenlehre von 1913 definiert Hessenberg informal den Typ eines Objekts bzgl. einer Äquivalenzrelation als die Menge all derjenigen Eigenschaften, die alle zu x äquivalenten Objekte y erfüllen. Er gesteht ein, dass eine logisch untadelige Formulierung des Abstraktionsaktes fehlt, dass es aber unschädlich und bequem sein, mit Typen zu arbeiten [Hessenberg 1913, p. 71].

Die mengentheoretischen Paradoxien waren zu dieser Zeit in aller Munde, und manchmal wurden Zweifel laut, ob der Begriff einer Kardinalzahl überhaupt sinnvoll sei. Solche Zweifel finden sich 1906 im Buch „The Theory of Sets of Points" von William und Grace Young. In einer Fußnote, die die relationale Definition der Mächtigkeit ziert, heißt es:

W. Young/ G. Young (1904): „it must be emphasized that there are difficulties in accepting the statement that every set has a potency … While this question is unsettled, Cantor's [general diagonalization argument showing] that there is no greatest potency … cannot be regarded as convincing." [Young /Young 1906, p. 147]

Warum Cantors Argument nicht überzeugt bleibt unklar. Die ungelösten Paradoxien wirken bedrohlich.

1908 / 1915 – Zermelos Axiomatik und eine Ordinalzahl-Definition

Zermelos erste Axiomatik von 1908 – eine nicht formalisierte Version von ZFC ohne Ersetzungsschema und Fundierungsaxiom – behandelt die grundlegende Theorie der relationalen Mächtigkeit einschließlich des Satzes von Cantor-Bernstein, dringt aber nicht zu Kardinalzahlen als Objekten der Theorie vor. Wir wissen heute, dass das System zu schwach für beide modernen Definitionen ist.

Im Jahr 1915 oder sogar früher fand Zermelo die heutigen von Neumann-Ordinalzahlen, publizierte aber seine Erkenntnisse nicht [Neumann 1928b, p. 374, Fußnote 2; Ebbinghaus 2007, p. 133]. Zudem fehlte immer noch das Ersetzungsschema, das benötigt wird, um zu zeigen, dass jede Wohlordnung gleichlang zu einer derartigen Ordinalzahl ist.

1914 / 1927 – Hausdorffs „formaler Standpunkt"

Der nächste Schritt nach vorne kommt von Hausdorff. In seinem Klassiker „Grundzüge der Mengenlehre" von 1914 bespricht Hausdorff die Definitionen von Cantor and Russell. Im Anschluss führt er „Zeichen" ein und reduziert das Problem auf die Korrektheitseigenschaft:

Hausdorff (1914): „Mengen eines Systems, die einer gegebenen Menge und damit auch untereinander äquivalent sind, haben etwas Gemeinsames, das im Falle endlicher Mengen die Anzahl der Elemente ist und das man auch im allgemeinen Falle die Anzahl oder Kardinalzahl oder Mächtigkeit nennt. Über die absolute Beschaffenheit dieses neu eingeführten Etwas kann man allerhand verschiedene Auffassungen hegen. G. Cantor definiert die Mächtigkeit einer Menge als den Allgemeinbegriff, der durch Abstraktion von der individuellen Beschaffenheit[1] ihrer Elemente entsteht. B. Russell definiert sie geradezu als die Gesamtheit oder Klasse ‚aller' mit jener Menge äquivalenten Mengen; dies halten wir bei der uferlosen und antinomischen Beschaffenheit dieser Klasse für bedenklich. Wenn wir analoge Beispiele aus anderen Gebieten der Mathematik heranziehen, wird die gegenwärtige Situation nicht klarer; denn wenn wir kongruenten Punktpaaren eine gemeinsame ‚Entfernung', parallelen Geraden eine gemeinsame ‚Richtung', ähnlichen Figuren eine gemeinsame ‚Form' beilegen, so können ja diese Begriffe außerdem wirklich durch Strecken, Winkel oder Zahlen präzisiert werden. Andererseits könnte man den Begriff der Mächtigkeit freilich entbehren und alles auf die Betrachtung äquivalenter Mengen beschränken, worunter aber die Bequemlichkeit des Ausdrucks erheblich leiden würde. Übrigens ist darauf aufmerksam zu machen, daß die genannten Schwierigkeiten auch schon bei endlichen Mengen bestehen, wo es ja an verschiedenen Auffassungen des Zahlbegriffs durchaus nicht mangelt. Wir werden uns einfach auf den formalen Standpunkt stellen und sagen: einem System von Mengen A ordnen wir eindeutig ein System von Dingen $\mathfrak{a}$ zu derart, daß äquivalenten Mengen und nur solchen dasselbe Ding entspricht, d.h. daß aus $A \sim B$ [$|A| = |B|$] immer $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt und umgekehrt. Diese neuen Dinge oder Zeichen nennen wir Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten; wir sagen: A hat die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$, A ist von der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ ist die Mächtigkeit von A, wohl auch (indem wir $\mathfrak{a}$ als Zahlwort verwenden) A hat $\mathfrak{a}$ Elemente." [Hausdorff 1914, p. 46]

Die hier ausgelassene Fußnote 1) erwähnt, dass Cantor ebenfalls von Ordnung absieht, was hier nicht gebraucht wird, da er eine Ordnung nicht als ursprünglichen Bestandteil des Mengenbegriffs ansieht.

Ordnungstypen von linearen Ordnungen werden analog eingeführt [Hausdorff 1914, p. 73]. Auch hier begnügt sich Hausdorff mit korrekten Zeichen.

Hausdorffs „Mengenlehre" aus dem Jahr 1927 ist eine umgearbeitete Version der Grundzüge „Grundzüge". Das Buch ist deutlich kürzer, enthält aber auch neues Material, vor allem zur deskriptiven Mengenlehre. Die Einführung der Kardinalzahlen liest sich hier so:

Hausdorff (1927): „… wir ordnen jeder Menge A ein Ding $\mathfrak{a}$ zu derart, daß äquivalenten Mengen und nur solchen dasselbe Ding entspricht:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \quad \text{soviel wie} \quad A \sim B.$$

Diese neuen Dinge nennen wir Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten …

Diese formale Erklärung sagt, was die Kardinalzahlen sollen, nicht was sie sind. Prägnantere Bestimmungen sind versucht worden, aber sie befriedigen nicht und sind auch entbehrlich. Relationen zwischen Kardinalzahlen sind nur ein bequemer Ausdruck für Relationen zwischen Mengen: das ‚Wesen' der Kardinalzahl zu ergründen müssen wir der Philosophie überlassen." [Hausdorff 1927, § 5]

Vorbildlich ist hier die Eloquenz (mit einem Seitenhieb auf Arbeiten wie [Dubislav 1927, p. 31f]). Während Hausdorffs Standpunkt 1914 überzeugend oder zumindest akzeptabel war, wirkt er 1927 wie eine Pflichtvernachlässigung. Es liegt ein mathematisches Problem vor, das nichts mit einer philosophischen Debatte zu tun hat: Wie definieren wir die Symbole uniform, sodass zwei Mengen genau dann das gleiche Symbol erhalten, wenn sie gleichmächtig sind? Hausdorff machte es klarer als irgendeiner vor ihm, dass diese Korrektheit das einzige ist, was wirklich gebraucht wird. Er reduzierte das Problem auf die Frage nach einer Kardinalzahldefinition im Sinne des ersten Abschnitts. Aber er war an einer Lösung nicht interessiert. Dass 1914 eines der großen Bücher der mathematischen Literatur die Mengenlehre (einschließlich der Topologie und Maßtheorie) in informaler Weise weit nach vorne brachte ist eine großartige Errungenschaft. Hausdorff hielt sich aus der Seeschlacht um die Paradoxien heraus und umschiffte sie mit einer Fülle an neuer Mathematik und geschliffener Rhetorik. Analoges gilt 1927 für die deskriptive Mengenlehre. Aber die gekürzte und unbekümmerte Diskussion der Kardinalzahlen von 1927 und ihre unveränderte Form in der dritten Auflage von 1935 ist bedauerlich. John von Neumanns Artikel, der die heute nach ihm benannten Ordinalzahlen einführte, war bereits 1923 erschienen. Er bildet eine Wasserscheide für jede Behandlung von Ordinal- und Kardinalzahlen.

1923 / 1928 – John von Neumanns Ordinal- und Kardinalzahlen

John von Neumanns Artikel „Zur Einführung der transfiniten Zahlen“ von 1923 beginnt mit den Worten:

---

von Neumann (1923): „Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist: den Begriff der *Cantor*schen Ordnungszahl eindeutig und konkret zu fassen.

Dieser Begriff wird nach *Cantor*s Vorgang gewöhnlich als ‚Abstraktion‘ einer gemeinsamen Eigenschaft aus gewissen Klassen gewonnen. Dieses etwas vage Verfahren wollen wir durch ein anderes auf eindeutigen Mengenoperationen beruhendes, ersetzen. Das Verfahren wird in den folgenden Zeilen in der Sprache der naiven Mengenlehre dargestellt werden, es bleibt aber (im Gegensatz zu *Cantor*s Verfahren) auch in einer ‚formalistischen‘, axiomatisierten Mengenlehre richtig. So behalten unsere Schlüsse auch im Rahmen der *Zermelo*schen Axiomatik (wenn man das *Fränkel*sche Axiom hinzufügt) volle Geltung.“ [Neumann 1923, p. 92; hier ohne Fußnoten wiedergegeben.]

Von Neumann definiert Ordinalzahlen wie folgt. Sei M eine wohlgeordnete Menge. Eine Funktion f auf M heißt eine *Zählung* von M, falls gilt:

$$f(x) = \{ f(y) \mid y < x \} \text{ für alle } x \in M$$

Ist f eine Zählung von M, so heißt $\{ f(x) \mid x \in M \}$ eine *Ordnungszahl* von M. Von Neumann beweist, dass Ordnungszahlen eindeutig bestimmt sind. Und dass ein α genau dann eine Ordnungszahl ist, wenn α durch die echte Inklusion wohlgeordnet wird und zudem $\beta = \{\gamma \in \alpha \mid \gamma < \beta\}$ für alle $\beta \in \alpha$ gilt. Es ist leicht nachzuweisen, dass diese Charakterisierung äquivalent zu

„α ist transitiv und wohlgeordnet durch $\in$“

ist. Damit ist die heutige Definition der Ordinalzahlen gefunden. Als wichtige Anwendung beweist von Neumann den transfiniten Rekursionssatz und betont dabei den Einsatz des Ersetzungsschemas.

Der Artikel von 1923 diskutiert keine Kardinalzahlen. Aber die Mengen

$$W(\alpha) = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$$

mit Cantorschen Ordinalzahlen wurden in der damaligen Literatur häufig herangezogen. Ordinalzahlen α mit der Eigenschaft

$$|W(\beta)| < |W(\alpha)| \quad \text{für alle } \beta < \alpha$$

waren als *Anfangszahlen* bekannt. Die Begriffsbildungen gehen auf Cantor zurück, Hausdorff führte die $W(\alpha)$-Notation ein und untersuchte die Eigenschaften der Wohlordnungen $W(\alpha)$ [Hausdorff 1914, p. 104f, 122f]. Wir werden in Abschnitt C sehen, dass Cantor bereits 1883 Mengen von Ordinalzahlen verwendet hat, um Repräsentanten für Mächtigkeiten wohlgeordneter Mengen zu erhalten.

Von Neumann schreibt, dass er eine exakte Ordinalzahldefinition anstrebt, die die Eigenschaft $W(\alpha) = \alpha$ für alle α besitzt [Neumann 1923, p. 90]. Bei Verwendung der von Neumann Ordinalzahlen sind die Anfangszahlen nichts anderes als die heutigen ZFC-Kardinalzahlen. Damit war zumindest implizit klar, dass nun auch eine repräsentierende Kardinalzahldefinition vorliegt – vorausgesetzt, jede Menge lässt sich wohlordnen. Explizit erscheint eine derartige Kardinalzahldefinition zuerst in von Neumanns Artikel „Die Axiomatisierung der Mengenlehre“ von 1928, der seinerseits auf seiner Dissertation von 1925 beruht. Hier finden wir:

---

von Neumann (1928): „In der ‚naiven‘ Cantorschen Mengenlehre wird zuerst der Begriff der ‚Mächtigkeit‘ definiert als das einer Klasse untereinander äquivalenter Mengen gemeinsame Merkmal; sodann der Begriff des ‚Alephs‘ oder der ‚Kardinalzahl‘ als Mächtigkeit einer wohlgeordneten Menge; und schließlich der der ‚Anfangszahl‘ als die kleinste einem gegebenen Aleph äquivalente Ordnungszahl.

Da in unserem Systeme der Wohlordnungssatz bewiesen ist (Satz 55), so fallen die Begriffe ‚Mächtigkeit‘ und ‚Aleph‘ bzw. ‚Kardinalzahl‘ jedenfalls zusammen (wenn sie einmal irgendwie definiert sind), und die unter diesen Begriff fallenden Dinge sind den ‚Anfangszahlen‘ eineindeutig zugeordnet. In Anbetracht dieser Lage werden wir bei der Definition der genannten Begriffe noch um einen Schritt weitergehen und alle vier kurzweg identifizieren. Wir definieren nämlich:

Definition. Wir nennen eine Ordnungszahl P eine Kardinalzahl (oder: Anfangszahl, Aleph, Mächtigkeit), in Zeichen: P **KZ**, wenn für kein Q **OZ** [OZ = Ordinalzahl], $Q < P$, $Q \approx P$ [$|Q| = |P|$] ist.“ [Neumann 1928, p. 731]

Genau ein halbes Jahrhundert liegt zwischen Cantors erster relationaler Definition der Mächtigkeit und der repräsentierenden Kardinalzahldefinition von von Neumann.

In einem weiteren Artikel von 1928 hält von Neumann fest, dass die Definitionen durch Abstraktion in einem formalisierten System nicht anwendbar sind:

---

von Neumann (1928): „Die seit Cantor übliche (und bis zum scharfen Auftreten der Kritik der Mengenlehre rücksichtslos geübte) Definition der Ordnungszahlen durch Abstraktion einer Eigenschaft gewisser Mengen (nämlich aller, die einer gegebenen wohlgeordneten Menge ähnlich sind) ist in einer formalistischen Mengenlehre jedenfalls gänzlich unbrauchbar, und auch in der naiven Mengenlehre wäre ihr wohl eine direkte, eigentliche Definition (die die Ordnungszahlen als wohldefinierte Mengen eindeutig festlegt) vorzuziehen." [Neumann 1928b, p. 373 f]

Zusammenfassend: Eine Objektdefinition von Ordinal- und Kardinalzahlen ist einem formen System unerlässlich und auch innerhalb der naiven Mengenlehre wünschenswert.

Von Neumanns Lösung wurde nicht sogleich allgemein akzeptiert und wertgeschätzt. Einige blieben skeptisch. Abraham Fraenkels dritte Auflage seiner „Einleitung in die Mengenlehre" von 1928 enthält eine umfangreiche Diskussion des informalen Ansatzes und seiner Kritik [Fraenkel 1928, p. 57 – 60]. Fraenkel verteidigt die informale Verwendung von Kardinalzahlen, und betont dabei einmal mehr, dass sich jede Aussage über Kardinalzahlen in eine Aussage über Mengen und Bijektion übersetzen lässt. Am Ende der Diskussion zitiert er die Einführung der Kardinalzahlen durch von Neumann 1928, fügt aber hinzu, das es im Allgemeinen für die Mengenlehre nicht nötig sei, Kardinalzahlen als Mengen einzuführen [Fraenkel 1928, p. 60]. Da das Buch im gleichen Jahr wie die beiden von Nuemanschen Arbeiten erschienen ist, könnte man versucht sein, dies als einem Verweis auf ein gerade erst erschienenes Ergebnis zu werten. Doch auch in Fraenkels zweiter Auflage von „Abstract Set Theory" von 1961 ist es nicht anders: Das Buch enthält eine aktualisierte „analysis of the concept of a cardinal", von Neumanns Lösung wird aber erneut nur beiläufig erwähnt [Fraenkel 1961, p. 61 f].

Im Gegensatz hierzu bezieht sich Dana Scott bereits 1955 auf von Neumanns Definition mit den Worten „as it is customary" (siehe das Zitat unten). Heute ist von Neumanns Definition der Ordinal- und Kardinalzahlen ein ein fester Bestandteil der axiomatischen Mengenlehre. Hausdorffs informaler Zugang von 1914 ist noch immer, in der einen oder anderen Form, in Lehrbüchern der Algebra, Topologie usw. lebendig, die auf eine elementare Kardinalzahlarithmetik nicht verzichten möchten. Kardinalzahlen werden als Zeichen mit Betonung der Korrektheitseigenschaft eingeführt – mit einer Fußnote, dass eine formal befriedigende Definition innerhalb der axiomatischen Mengenlehre möglich ist. Da eine solche Lösung möglich, aber nicht trivial ist, ist diese Vorgehen sicherlich natürlich. Die Mengenlehre dient der Mathematik als Fundament. Nicht jeder muss hier alles kennen. Das ist mit natürlichen Zahlen genauso wie mit unendlichen Kardinalzahlen.

Überblicken wir die gesamte Entwicklung, so stechen die drei sehr unterschiedliche Ansätze von Cantor, Hausdorff und von Neumann heraus. Von Neumanns Lösung lässt sich als „modern, genial, technisch", beschreiben, der durch Hausdorff repräsentierte Zwischenschritt als „einfach, pragmatisch, unbeirrt", und Cantors Zugang als „romantisch, traditionsbewusst, philosophisch".

1955 – Scotts Trunkierungsmethode

Scott hat seine Methode der Trunkierung echter Klassen 1955 auf einem Treffen der American Mathematical Society in Vancouver vorgestellt. Das Ergebnis wurde in Form einer Zusammenfassung (abstract) mit dem bezeichnenden Titel „Definitions by abstraction in axiomatic set theory" veröffentlicht. Die Zusammenfassung enthält eine Darstellung der allgemeinen Methode. Kardinalzahlen werden als ihre wichtigste Anwendung genannt:

Scott (1955): „Applications: It is customary to identify the cardinal number of a set with the least ordinal with which the set is cardinally equivalent; thus the axiom of choice is required to show that every set has a cardinal. But let $\varphi(x, y)$ be a formula expressing the cardinal equivalence of x and y. Define the cardinal of x as $\zeta(x)$ [= „die Rang-Trunkierung von $\{ y \mid \varphi(x, y) \}$"]. [Die Eigenschaften dieser Definition] … are sufficient for an adequate notion of cardinal number. Thus the axiom of choice is unnecessary in this context. Similar remarks apply to relation types and isomorphism types." [Scott 1955, p. 442]

Scotts Methode nimmt bis heute einen wichtigen Platz in der axiomatischen Mengenlehre ein. Ein Beispiel ist die Definition einer Ultrapotenz auf dem Mengenuniversum (vgl. etwa [Kanamori 1994, p. 47]). Es spielt zudem eine Schlüsselrolle im Beweis des Kollektionsschemas. Dieses besagt: Ist y eine Menge und sind C_x, $x \in y$, nichtleere Klassen, so gibt es eine Menge z, sodass für alle $x \in y$ gilt: $z \cap C_x \neq \emptyset$. Zum Beweis: Die Vereinigung aller Rang-Trunkierungen der Klassen C_x, $x \in y$, ist ein z wie gewünscht.

C. Cantors Mächtigkeiten und Kardinalzahlen vor 1895

Für Leser mit Freude an historischen Feinheiten verfolgen wir nun noch Cantors Verwendung von „Mächtigkeit“ und „Kardinalzahl“ in chronologischer Form. Wir beginnen mit dem „Geburtstag“ der Mengenlehre:

1874 – Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In einem Brief an Dedekind vom 29. November 1873 wirft Cantor die Frage auf, ob die reellen Zahlen in eine 1-1-Korrespondenz mit den natürlichen Zahlen gebracht werden können [Cantor 1991, p. 31]. Weniger Tage später – in einem Brief 7. Dezember 1873 zeigt Cantor, dass dies nicht möglich ist [Cantor 1991, p. 35f]. Ein vereinfachter Beweis dieses grundlegenden Ergebnisses erscheint in „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen“ 1874. Der Begriff „Mächtigkeit“ oder ein relationaler Vergleich zweier Mengen mit Hilfe von Bijektionen findet sich hier noch nicht.

1878 – Die allgemeine relationale Definition

Cantor verfolgte die Frage nach 1-1-Korrespondenzen weiter. In Briefen an Dedekind vom 5. Januar 1874 und 18. Mai 1874 stellt er die Frage, ob es eine Bijektion zwischen der Linie $\mathbb{R}$ und der Ebenen $\mathbb{R}^2$ gibt [Cantor 1991, p. 38, 40]. Drei Jahre später findet er zu seiner Überraschung, dass die Antwort „ja“ ist. Er teilt seine Entdeckung Dedekind in einem Brief vom 20. Juni 1877 mit [Cantor 1991, p. 41]. Dedekind findet eine Lücke im Argument. Cantor konnte den Beweis verbessern und das Ergebnis wurde in „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ von 1878 veröffentlicht. Diese Arbeit beginnt mit der relationalen Definition der Mächtigkeit:

Cantor (1878): „Wenn zwei wohldefinirte Mannigfaltigkeiten M und N sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen (was, wenn es auf eine Art möglich ist, immer auch noch auf viele andere Weisen geschehen kann), so möge für das Folgende die Ausdrucksweise gestattet sein, dass diese Mannigfaltigkeiten *gleiche Mächtigkeit* haben, oder auch, dass sie *äquivalent* sind.“ [Cantor 1878, p. 242]

Die Passage fährt mit der Behauptung fort, dass zwei Mengen stets in ihrer Mächtigkeit vergleichbar seien (also dem aus heutiger Sicht zum Auswahlaxiom äquivalenten Vergleichbarkeitssatz). Am Ende der Arbeit notiert Cantor seine Paarungsfunktion $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ als Polynom. Zudem formuliert er die Kontinuumshypothese. Sein Hauptresultat $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^2$ ist der Beginn der Untersuchung des Dimensionsbegriffs.

Cantor gibt in seiner Arbeit keine Definition von „Mächtigkeit einer Menge“, aber bereits 1878 spricht er von Mächtigkeiten so, als hätte er sie als Objekte definiert. Einmal spricht er beispielsweise von der kleinsten unendlichen Mächtigkeit [Cantor 1878, p. 243]. Das folgende Zitat enthält ein zweites Beispiel.

Die Definitionen von $|M| = |N|$ und $|M| \leq |N|$ führen in der Tat schnell zu einer intuitiven Anschauung von „Mächtigkeit“ an sich, die auch sprachlich weitaus einfacher zu verwenden ist als die relationale Form. Die endlichen Zahlen tragen zu diesem psychologischen Prozess bei. Aber auch ohne diesen Rückhalt ist die „Abstraktionsfähigkeit des menschlichen Geistes“ zu beobachten. Ein Vergleich „leichter/gleichschwer/schwerer“ zweier Objekte mit einer Waage führt zu einem anschaulichen Begriff „Gewicht“, etwa in Formulierungen wie „Das Gewicht dieses Steins ist zu groß um ihn zu heben.“ oder „Das Gewicht einer Feder.“

Cantor fährt vor:

Cantor (1878): „Wenn die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten *endliche*, d.h. aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehende sind, so entspricht, wie leicht zu sehen ist, der Begriff der Mächtigkeit dem der *Anzahl* und folglich dem der *ganzen positiven Zahl*, da nämlich zweien solchen Mannigfaltigkeiten dann und nur dann gleiche Mächtigkeit zukommt, wenn die Anzahl ihrer Elemente die gleiche ist.“ [Cantor 1878, p. 242]

Hier bringt Cantor „Mächtigkeit“ in Verbindung mit „Anzahl“. Die Verwendung von „entspricht“ ist an dieser Stelle nicht ganz klar, aber wir werden gleich sehen, dass Cantor tatsächlich natürliche Zahlen als spezielle Mächtigkeiten angesehen hat (zumindest ab 1882). Zudem zeigen spätere Ausführungen in der Arbeit von 1878, dass *Anzahl* den ordinalen Aspekt der natürlichen Zahlen bezeichnet, sodass das „folglich“ auf das Zusammenfallen des ordinalen und kardinalen Charakters der natürlichen Zahlen verweist.

1879 bis 1883 – Mächtigkeiten in Cantors „Punktmannigfaltigkeiten“

Im ersten Teil seiner Aufsatz-Reihe über Mengen reeller Zahlen von 1879 wiederholt Cantor die relationale Definition und fügt hinzu:

Cantor (1879): „Je nachdem nun zwei Mannichfaltigkeiten von gleicher oder verschiedener Mächtigkeit sind, können sie *einer* und *derselben Classe* oder *verschiedenen Classen* zugeteilt werden. Diese allgemeinen Regeln lassen sich nun im Besondern auf die *linearen Punktmengen* anwenden und es zerfallen daher dieselben in *bestimmte Classen;* die Punktmengen einer Classe sind alle von gleicher *Mächtigkeit*, dagegen Punktmengen, welche verschiedenen Klassen zugetheilt sind, verschiedene Mächtigkeit haben.

Jede specielle Punktmenge kann als *Repräsentant* derjenigen Classe betrachtet werden, in welche sie gehört.“ [Cantor 1879, p. 4]

Nichts deutet in dieser Passage auf eine Identifizierung von Mächtigkeit mit einer Klasse gleichmächtiger Mengen hin. (Cantor verwendete die Bezeichnung „Classe“ bereits in seinem Artikel von 1878.)

Der zweite Teil der „Punktmannigfaltigkeiten" von 1880 führt, was den Mächtigkeitsbegriff betrifft, lediglich die Notation $M \sim N$ für gleichmächtige Mengen ein [Cantor 1880, p. 356]. Der dritte Teil enthält neue und klärende Ausführungen:

Cantor (1882): „Auch der *Mächtigkeitsbegriff*, welcher den Begriff der ganzen Zahl, dieses Fundament der Grössenlehre, als Specialfall in sich fasst und als das allgemeinste genuine Moment bei Mannichfaltigkeiten angesehen werden dürfte, ist so wenig auf die linearen Punktmengen beschränkt, dass er vielmehr als Attribut einer jeglichen *wohldefinirten* Mannichfaltigkeit betrachtet werden kann, welche begriffliche Beschaffenheit ihre Elemente auch haben mögen …

Den Ausdruck ‚Mächtigkeit' habe ich J. Steiner entlehnt [aus seinen Vorlesungen über synthetische Geometrie der Kegelschnitte] der ihn in einem ganz speciellen, immerhin jedoch verwandten Sinne gebraucht, um auszusprechen, dass zwei Gebilde durch *projectivische* Zuordnung so auf einander bezogen sind, dass jedem Element des einen ein und nur ein Element des andern entspricht; bei dem hier gemeinten absoluten Mächtigkeitsbegriff wird zwar an der gegenseitig-eindeutigen Beziehbarkeit festgehalten, dagegen für das Gesetz der Zuordnung keinerlei Beschränkung, namentlich keine Beschränkung in Bezug auf Stetigkeit und Unstetigkeit gemacht, so dass zweien Mengen, dann aber auch nur dann *gleiche* Mächtigkeit zugestanden wird, wenn sie nach irgend einem Gesetze einander gegenseitig-eindeutig zugeordnet werden können …" [Cantor 1882, p. 114f]

Eine Seite mit Ausführungen zu *wohl-definiert* und *intern bestimmt* im Anschluss an die ersten Pünktchen „…" wurde hier nicht wiedergegeben. Sie zeigt, dass Cantor wie Dedekind keinen konstruktiven Ansatz verfolgte.

In der zitierten Passage wird „Mächtigkeit" ohne weitere Erklärung als Eigenschaft jeder Menge bezeichnet. Bis 1887 wird Cantor schreiben, dass der Begriff der Mächtigkeit aus der relationalen Definition hervorgeht oder von ihr abhängt (vgl. insbesondere die Definition von 1884 unten). Die Abkehr von dieser Sicht wie wir sie aus der Definition von 1895 kennen, wurde in klarer Form 1887 durchgeführt. Ab diesem Zeitpunkt sind Mächtigkeiten definiert, ohne dass die relationale Form vorab eingeführt sein müsste.

Cantor lässt keinen Zweifel daran, dass er den Begriff einer natürlichen Zahl als Spezialfall des Begriffs der Mächtigkeit ansieht (vgl. das zweite Zitat oben aus der Arbeit von 1878). Schließlich informiert uns der Artikel über die Quelle des Worts *Mächtigkeit*. Bei Steiner finden wir:

Steiner (1867): „Diese beiden einfachsten geometrischen Gebilde (Punktreihe und Strahlbüschel) sind von gleicher Mächtigkeit und einfacher Unendlichkeit, d. h. es giebt ebenso viel Punkte auf einer Geraden, als Strahlen durch einen Punkt." [Steiner 1867, p. 1].

Die nächsten neuen Ausführungen zum Mächtigkeitsbegriff erscheinen im fünften Teil der „Punktmannigfaltigkeiten", als Cantor die Bedeutung seiner neuen transfiniten Zahlen zum Verständnis der Mächtigkeiten von Mengen diskutiert. Er führt die folgenden Begriffe ein: Die *erste Zahlenklasse* ist die Menge der natürlichen Zahlen. The *zweite Zahlenklasse* ist die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen. Allgemein hat eine Zahlenklasse die Form $\{ \beta \mid |\beta| = |\alpha| \}$ mit einer unendlichen Ordinalzahl α. Cantor fährt fort:

Cantor (1883): „Von der grössten Bedeutung scheint mir zunächst die Einführung der neuen ganzen Zahlen für die Entwickelung und Verschärfung des [in meinen früheren Arbeiten] verwandten Mächtigkeitsbegriffes. Jeder wohldefinirten Menge kommt darnach eine bestimmte Mächtigkeit zu, wobei zweien Mengen dieselbe Mächtigkeit zugeschrieben wird, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen.

Bei endlichen Mengen fällt die Mächtigkeit mit der *Anzahl* der Elemente zusammen, weil solche Mengen in jeder Anordnung bekanntlich dieselbe Anzahl von Elementen haben.

Bei unendlichen Mengen hingegen war bisher überhaupt weder in meinen Arbeiten noch sonst wo von einer präcis definierten *Anzahl* ihrer Elemente die Rede, wohl aber konnte auch ihnen eine bestimmte, von ihrer Anordnung völlig unabhängige *Mächtigkeit* zugeschrieben werden.

Die kleinste Mächtigkeit unendlicher Mengen mußte, wie leicht zu rechtfertigen war, denjenigen Mengen zugeschrieben werden, welche sich gegenseitig eindeutig der ersten Zahlenclasse zuordnen lassen und daher mit ihr gleiche Mächtigkeit haben. Dagegen fehlte es bisher an einer ebenso einfachen, natürlichen Definition der höheren Mächtigkeiten.“ [Cantor 1883]

Zusammen mit dem hier nicht zitierten § 2 des Artikels ist klar, dass Cantor mit *Anzahl* den Ordnungstyp einer wohlgeordneten Mengen bezeichnet [Cantor 1883b, p. 548]. Dies bedeutet nicht, dass überabzählbare Kardinalzahlen noch nicht definiert sind – Cantor sagt explizit, dass jede Menge eine bestimmte Mächtigkeit besitzt. Aber es ist ihm zum Beispiel noch nicht gelungen, „die kleinste überabzählbare Mächtigkeit“ zu definieren, da ihm keine Menge zur Verfügung stand, die zu einer entsprechenden Mächtigkeit führen würde.

Cantor (1883): „Unsere oben erwähnten Zahlenclassen der bestimmt-unendlichen realen ganzen Zahlen weisen sich nun als die natürlichen, in einheitlicher Form sich darbietenden Repräsentanten der in gesetzmässiger Folge aufsteigenden Mächtigkeiten von wohldefinirten Mengen aus. Ich zeige aufs Bestimmteste, dass die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II) nicht nur verschieden ist von der ersten Zahlenclasse, sondern dass sie auch thatsächlich die nächst höhere Mächtigkeit ist; wir können sie daher die zweite Mächtigkeit oder die Mächtigkeit zweiter Classe nennen. Ebenso ergiebt die dritte Zahlenclasse die Definition der dritten Mächtigkeit oder der Mächtigkeit dritter Classe u. s. w. u. s. w.“ [Cantor 1883b, p. 547]

Aus Cantors Notizen zu dieser Arbeit geht hervor, dass das doppelte „u. s. w.“ alle Ordinalzahlen und nicht nur alle natürlichen Ordinalzahlen anzeigt. Cantor notiert, dass es für jede Ordinalzahl γ eine γ-te Mächtigkeit gibt [Cantor 1883b, p. 587 f, Fußnote 2].

Einmal mehr führt Cantor nicht weiter aus, was er genau mit „Mächtigkeit“ einer unendlichen Menge meint. Aber endliche Mächtigkeiten „fallen zusammen“ mit endlichen Ordnungstypen. Und später in der Arbeit werden Nachfolgerordinalzahlen durch Hinzufügen einer Einheit generiert, was Cantor „erstes Erzeugungsprinzip“ nennt [Cantor 1883b, p. 576f]. Damit sind Ordinalzahlen „(geordnete) Systeme aus Einheiten“. In dieser Form sind die Kardinalzahlen bereits 1883 mit den klassischen Einheiten verbunden.

Cantor beweist in dem Artikel, dass es (in heutiger Notation), eine kleinste Kardinalzahl $\aleph_1 > \aleph_0$ gibt, die die zweite Zahlenklasse $\omega_1 - \omega$ repräsentiert [Cantor 1883b, p. 579f]. And analog gibt es eine kleinste Kardinalzahl $\aleph_2 > \aleph_1$ für die dritte Zahlenklasse $\omega_2 - \omega_1$ usw. Hier taucht ein Problem im Limesschritt auf, da die Limeskardinalzahl $\aleph_\omega$ keiner Cantorschen Zahlenklasse entspricht. Dieses Problem wird in der Arbeit nicht diskutiert, aber Cantor macht, in moderner Sprechweise, deutlich, dass eine repräsentierende Kardinalzahldefinition aus einer Ordinalzahldefinition erhalten werden kann – vorausgesetzt, der Wohlordnungssatz gilt. Der Wohlordnungssatz selbst wurde von Cantor 1883 als „Denkgesetz“ bezeichnet [Cantor 1883b, p. 550]. Erneut enthält die Arbeit keinen Hinweis darauf, dass Cantor die Zahlenklassen als Mächtigkeiten ansah. Mit anderen Worten: Cantor wollte $\aleph_\alpha$ nicht mit ω_α identifizieren.

Ziehen wir die Notizen zu dem Artikel hinzu und ersetzen wir die Zahlenklassen durch Anfangsstücke der Ordinalzahlen (also zum Beispiel die zweite Klasse $\omega_1 - \omega$ durch ω_1), so beschreibt Cantor das heutige Bild von ZFC: Es gibt eine echte Klasse $\langle \aleph_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ von unendlichen Kardinalzahlen ($\aleph_\alpha = |\omega_\alpha|$), und jede unendliche Mächtigkeit ist ein Element dieser Klasse. Cantor verwendet „absolut-unendlich“ für die Folge aller Ordinal- und Kardinalzahlen [Cantor 1883b, p. 576; 1883b, p. 588]. Er hat, in unserer Sprache, echte Klassen entdeckt. All dies wird in der Arbeit nur skizziert oder angeschnitten, und es ist äußerst bedauerlich, ass die nun folgende „Acta-Affäre“ zur Verzögerung der Kommunikation dieser fundamentalen Entdeckungen beigetragen hat.

1884 – Cantors zurückgezogene Arbeit und der Brief an Laßwitz

Cantor schickte seinen Artikel „Principien einer Theorie der Ordnungstypen“ im November 1884 und Februar 1885 in zwei Teilen an seinen Freund Gösta Mittag-Leffler. Sie sollte in den „Acta Mathematica“ erscheinen, die bereits französische Übersetzungen seiner deutschsprachigen Arbeiten publiziert hatten. Wir verweisen den Leser auf [Grattan-Guiness 1970] für den Artikel, eine Einführung und weitere Dokumente (das Zitat unten ist aus dem ersten Teil von 1884). Der erste Teil des Artikels war bereits gesetzt, als Mittag-Leffler am 9. März 1885 einen Brief an Cantor schrieb, der ihm empfahl, die Arbeit zurückzuziehen. Cantor tat dies, war jedoch sehr irritiert und enttäuscht. Noch im Jahr 1896 nannte er die Angelegenheit eine Katastrophe (Brief an Poincaré vom 22. Januar 1896; siehe [Grattan-Guinness 1970, p. 105]).

In den „Principien“ finden wir eine sehr detaillierte Darstellung von Cantors Kardinalzahlen. Die folgende Version stellt bereits den letzten Schritt vor der abschließenden Formulierung von 1895 dar:

Cantor (1884): „Jeder wohldefinirten *Menge* von *Elementen*, gleichviel welcher Beschaffenheit die letzteren (und ob sie *gleichartig* oder *ungleichartig*, ob einfach oder zusammengesetzt) sind, kommt eine bestimmte *Mächtigkeit*, die ich auch *Valenz* nenne, zu.

Um die *Mächtigkeit* einer *durch Definition gegebenen Menge* zu bestimmen, schickt man den *Beziehungsbegriff* der *Äquivalenz* voraus; man nennt nämlich *zwei* Mengen *äquivalent*, wenn sie sich *gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen.*

Unter *Mächtigkeit* oder *Valenz* einer gegebenen Menge M verstehe ich den *Allgemeinbegriff* (Gattungsbegriff, Kategorie), *unter welchen alle der Menge M äquivalenten Mengen und nur diese, (und daher auch die Menge M selbst) fallen.*

Von *äquivalenten* Mengen sage ich auch, dass sie zu *einer* und *derselben Mächtigkeitsclasse* gehören: die *Classe* einer Menge M ist also nicht[s] Anderes, als der *Umfang* (dieses Wort in der Bedeutung der Schullogik als ‚ambitus' genommen) des zur Menge M gehörigen *Allgemeinbegriffs*, welchen ich die *Mächtigkeit der Menge* M genannt habe.

Die *Mächtigkeit* einer Menge M ist hiernach als die *Vorstellung* dessen bestimmt, was *allen* der Menge M *äquivalenten* Mengen und *nur diesen* und daher auch der Menge M selbst *gemeinsam* ist; sie ist die *repraesentatio generalis*, das τὸ ἕν [Grattan-Guinness hat ἕν wie in Cantors Manuskript] παρὰ τὰ πολλά für alle Mengen *derselben Classe wie M.* Sie erscheint mir daher als der *ursprünglichste*, sowohl *psychologisch* wie auch *methodologisch einfachste Stammbegriff*, entstanden durch *Abstraction* von allen *Besonderheiten*, die eine Menge von *bestimmter Classe* darbieten kann, sowohl in Ansehung der *Beschaffenheit* ihrer *Elemente*, wie auch hinsichtlich der *Beziehungen* und *Anordnungen*, in welchen die *Elemente sei es untereinander* oder zu *ausserhalb der Mengen liegenden Dingen* stehen können. Indem man nur auf *Dasjenige reflectirt, was allen einer und derselben Classe angehörigen Mengen gemeinsam ist*, entsteht der Begriff *Mächtigkeit* oder *Valenz.* [Grattan-Guiness 1970, p. 85 f]

Cantor unterscheidet erneut zwischen einer Kardinalzahl und ihren ihrem Umfang. Die Formulierung παρὰ τὰ πολλά ist platonisch im Gegen zu τὸ ἕν κατὰ τῶν πολλῶν wie bei Aristoteles (vgl. Aristoteles, Analytica posteriora 77a (I. 11) und [Fine 1980, p. 201]).

Die zitierte Passage ist wahrscheinlich durch Ueberwegs Darstellung von „Allgemeinvorstellung" von 1882 beeinflusst:

Ueberweg (1882): „§ 51. Wenn mehrere Objecte in gewissen Merkmalen und somit die Einzelvorstellungen von denselben in einem Theile ihres Inhalts (§§ 49 und 50) übereinstimmen, so entsteht durch Reflexion auf die gleichartigen und Abstraction von den ungleichartigen Merkmalen in Folge des psychologischen Gesetzes der Miterregung der gleichartigen psychischen Elemente und gegenseitigen Verstärkung des Gleichartigen im Bewusstsein die allgemeine Vorstellung (notio sive repraesentatio communis, generalis, universalis)." [Ueberweg 1882, p. 138]

Wir wissen von Cantors Rezension der „Grundlagen" von Frege, dass er Ueberwegs „System der Logik" kannte. Ueberweg fährt im Kleingedruckten mit τοῦ ἑνὸς παρὰ τὰ πολλά aus Aristoteles zweiter Analytik fort ([Ueberweg 1882, p. 139], vgl. auch § 56 von Ueberwegs Buch zu „Begriff (notio, conceptus)" und „Vorstellung". Dabei ist Ueberwegs Beschreibung von „Allgemeinvorstellung" selbst eine modernisierte Version der scholastischen Auffassung der Abstraktion.

Cantor (1884): Das Wort *Mächtigkeit* ist vielleicht am Besten im *Griechischen* durch ‚τὸ χράτος ‘, im *Lateinischen* durch ‚*potestas*‘ oder ‚*plenitudo*‘, im *Französischen* durch ‚*puissance*‘ oder durch die Neubildung ‚*valence*‘, im *Englischen* durch ‚*power*‘ oder ‚*mightiness*‘, im Italienischen durch ‚*podesta*‘ zu übersetzen.

In den ‚*Grundlagen*‘ habe ich bewiesen (oder vielmehr den Weg und die Mittel zum Beweise vollständig angegeben), dass die *verschiedenen Mächtigkeiten unendlicher Mengen* eine *nach demselben Typus* gebildete aufsteigende *absolut unendliche Reihe* ausmachen, wie die *realen*, *ganzen finiten* und *transfiniten Zahlen selbst;* je mehr man den *vollen Sinn* und *Inhalt* dieses Satzes zu erfassen sucht, um somehr muss man die *Natur* in ihrer *unermesslichen Grösse* bewundern …“ [Grattan-Guiness 1970, p. 85 f]

Zum ersten Mal in einer (intendierten) Publikation verwendet Cantor „Allgemeinbegriff“ und „erzeugt durch Abstraktion “ in seinem Kardinalzahlbegriff, und auch der doppelte Abstraktionsakt wird betont. Analoges gilt für die Definition des Ordnungstyps [Grattan-Guinness 1970, p. 87]. Ordnungstypen werden ebenfalls als „Allgemeinbegriff“ beschrieben; „Abstraktion“ wird hier, wahrscheinlich der Kürze halber, nicht erwähnt (eine zweifache Abstraktion ergibt ohne einfache Abstraktion keinen Sinn). Obwohl die Ordinalzahlen in den „Principien“ nicht explizit als Systeme von Einheiten beschrieben werden, so können wir sie doch mit gutem Recht als solche ansehen, da sie als Systeme von Einheiten bereits im fünften Teil der „Punktmannigfaltigkeiten“ beschrieben werden und es keinen Grund zur Annahme gibt, dass Cantor seine Ansicht geändert hätte. Damit sind und bleiben die Ordinalzahlen Systeme von Einheiten. Und da die Kardinalzahlen aus ihnen durch einen weiteren Abstraktionsakt hervorgehen, der von ihrer internen Ordnung absieht, sind Cantors Kardinalzahlen von 1884 ebenfalls Systeme von Einheiten.

Diese Identifikation der Cantorschen Allgemeinvorstellungen wird gestützt durch Cantors Brief an Kurd Laßwitz vom 15. Februar 1884 [Cantor 1991, p. 178]. Eine überarbeitete Version dieses Briefes wird 1887 in Cantors „Mitteilungen“ erscheinen. Cantor schreibt dort, dass der Brief auf einem Vortrag in Freiburg im September 1883 basiert [Cantor 1887, p. 93, Fußnote]). „Allgemeinvorstellung“ und „zweifache Abstraktion“ erscheinen in diesem Brief ebenso wie „Valenz“. Und Cantor schreibt explizit, dass sein Begriff des endlichen Ordnungstyps mit Euklids μονάδων-Definition zusammenfällt, und dass er σύστημα als „Typ einer wohlgeordneten Menge“ interpretiert.

Euklids Definition wird in dem Brief inkorrekt als als μονάδων σύστημα wiedergegeben; in den Mitteilungen von 1887 erscheint die korrekte Version wie wir sie Abschnitt B1 diskutiert haben. Im Gegensatz dazu wird Euklids Definition in den „Principien“ nicht erwähnt. Aber Cantor hält bei der Diskussion seiner Ordnungstypen das griechische ἀριθμός in Klammern fest und zeigt dadurch an, dass er die klassische Tradition fortsetzt und erweitert [Grattan-Guinness 1970, p. 89].

Der Laßwitz- Brief und die Arbeiten von 1883 und 1884 zeigen, dass eine auf eine Wohlordnung angewendete einfache Abstraktion einen Allgemeinbegriff erzeugt, der als System von Einheiten beschrieben werden kann, und dass Cantor seine Definition in Übereinstimmung mit der μονάδων σύστημα-Definition der griechischen Mathematik sieht. Dass seine Ordinal- und Kardinalzahlen aus Einheiten bestehen, lässt sich wohl explizit erst ab 1887 belegen. Wir sehen einmal mehr einen Cantorschen Begriff, der sich entwickelt und schärfer wird ohne dabei grundliegenden Modifikationen zu unterliegen. Cantors Mengenbegriff scheint ab 1887 umfassender zu sein als in den „Punktmannigfaltigkeiten" der frühen 1880er Jahre, die sich auf Teilmengen der reellen Zahlen konzentrierten [Tait 1998, I]. Allgemeiner ist jedoch die Anwendung und die Untersuchung der Mengen – die „Ausbildung" der Theorie – und nicht der Mengenbegriff selbst: Die erste Fußnote im fünften Teil der „Punktmannigfaltigkeiten" betont, hier einen Spezialfall einer viel umfassenderen Theorie zu diskutieren [Cantor 1883b, p. 587].

Der letzte Paragraph der zitierten Passage beschreibt das Bild, das wir aus verschiedenen Bemerkungen im fünften Teil der „Punktmannigfaltigkeiten" zusammengefügt haben. Es ist interessant, dass Cantor in seiner staunenden Bewunderung des „absolut Unendlichen" von „Natur" und nicht von „Geist" spricht. Dennoch werden transfinite Zahlen explizit als „Gedankendinge" bezeichnet, und seine Kardinalzahldefinition steht in keinerlei Widerspruch mit der Formulierung „in unserem Geiste Existenz haben" von 1895 [Grattan-Guiness 1970, p. 84]. Von der „unermesslichen Größe der Natur" zu sprechen zeigt einen romantischen Geist, der die Bedeutung eines gewaltigen Phänomens hervorheben möchte, dem man sich nur schrittweise annähern kann: „je mehr man … zu erfassen sucht".

Die im November 1884 geschriebene Passage unterstützt die in Abschnitt B3 angesprochene Lesart von Cantors Rezension von Freges „Grundlagen" vom Mai 1885: Freges Anzahl-Definition lässt sich auf die Ausdehnung jedes Begriffs anwenden, insbesondere auf *Ordinalzahl*. Aber gerade diese Hatte Cantor als absolut unendlich erkannt. Ihnen kommt keine Mächtigkeit zu, sie bilden kein „Ganzes", sind kein Objekt [Cantor 1883b, p. 587].

1887 – Kardinalzahlen in Cantors „Mitteilungen"

In einem Brief an seinen Italienisch-Übersetzer Gerbaldi vom 11. Januar 1896 schreibt Cantor, dass ihm die Acta-Affaire die mathematischen Journale „verleidet" hätte und dass er deswegen angefangen habe, „seine Zeilen" in einem philosophischen Journal zu veröffentlichen, der „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik" [Grattan-Guiness 1970, p. 104]. Der Hauptteil seiner ersten längeren Veröffentlichung in dieser Zeitschrift von 1887 trägt den Titel „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten". Er besteht aus Auszügen aus acht Briefen, die Cantor von 1884 bis 1887 an Mathematiker, Philosophen und Theologen geschrieben hatte. Der achte Abschnitt ist eine Kurzfassung der unpublizierten Arbeit von 1884 – mit einer Fußnote zum bedauerlichen Schicksal der Arbeit.

Cantor schließt mit „Habent sua fata libelli", einem Auszug aus „Pro captu lectoris habent sua fata libelli" des Terentianus Maurus [Cantor 1887, p. 117].

Die Zusammenstellung enthält eine Einleitung und Anmerkungen. In der Einleitung werden die griechischen Einheiten explizit mit allgemeinen Mächtigkeiten in Verbindung gebracht:

Cantor (1887): „Ad I und VIII. Hier findet sich die von mir seit etwa vier Jahren vertretene und in meinen Vorlesungen vielfach ausgebildete Auffassungsweise der ganzen Zahlen und Ordnungstypen als Universalien, die sich auf Mengen beziehen und aus ihnen sich ergeben, wenn von der Beschaffenheit der Elemente abstrahirt wird. Jede Menge wohlunterschiedener Dinge kann als ein einheitliches Ding für sich angesehen werden, in welchem jene Dinge Bestandteile oder constitutive Elemente sind. Abstrahirt man sowohl von der Beschaffenheit der Elemente, wie auch von der Ordnung des Gegebenseins, so erhält man die Cardinalzahl oder Mächtigkeit der Menge, einen Allgemeinbegriff, in welchem die Elemente, als sogenannte Einsen, gewissermaßen organisch in einander derartig zu einem einheitlichen Ganzen verwachsen sind, daß keine vor den anderen ein bevorzugtes Rangverhältnis hat. Daraus ergibt sich bei eingehender Erwägung, daß zweien verschiedenen Mengen dann und nur dann eine und dieselbe Cardinalzahl zukommt, wenn sie das zueinander sind, was ich äquivalent nenne ...“ [Cantor 1887, p. 82f]

Die die Abstraktion anzeigenden Notationen $\overline{\overline{M}}$ und $\overline{M}$ finden sich ebenfalls in der Arbeit [Cantor 1887, p. 118].

Cantor schreibt, dass er Kardinalzahlen als Allgemeinvorstellungen seit ungefähr vier Jahren ansieht, und dass er diese Sicht vielfach in seinen Vorträgen „ausgebildet“ hat. Und dass er in den letzten vier Jahren Zeit gehabt habe, die Scholastiker zu studieren [Cantor 1887, p. 264]. „Allgemeinbegriff“ wird genauer erklärt als „unum versus alia, in der Bedeutung: unum aptum inesse multis“, mit Referenzen an Thomas von Aquin [Cantor 1887, p. 118 und Fußnote]. Die Alternative „Valenz“ für „Mächtigkeit“ von 1884 wird nun durch „Kardinalzahl“ ersetzt.

Das Erscheinen von „Zahl“ in der Mächtigkeitsdefinition zeigt, dass Cantors Verwendung von „Zahl“ und „Anzahl“ sich verändert. In einem Brief an Peano vom 21. September 1895 schreibt Cantor, dass „Kardinalzahl“ und „Ordinalzahl“ die zwei „Arten“ des Begriffs „Anzahl“ seien [Cantor 1991, p. 365]. Im Gegensatz dazu zitiert er in der Einleitung seiner Arbeit von 1887 seine Rezension von 1885, die „Anzahl“ mit „Ordnungs-Typ“ gleichsetzt [Cantor 1887, p. 82]. Im ersten Brief der „Mitteilungen“ – einem Auszug aus dem oben erwähnten Brief an Laßwitz – strich Cantor eine Passage, die „Zahl“ und „Anzahl“ gleichsetzte (siehe [Cantor 1887, p. 95] im Vergleich mit [Cantor 1991, p. 179]).

Es ist bedeutsam, dass sich die Kardinalzahlen von der Relation der Gleichmächtigkeit gelöst haben. Wie in den später erschienenen „Beiträgen“ wird die Korrektheit als Satz angesehen, der sich aus der Kardinalzahldefinition herleiten lässt (siehe [Cantor 1887, p. 119f, 265f]; das Argument auf den Seiten 265f. ist wie in den „Beiträgen“).

Kardinalzahlen sind mehr als Multimengen bestehend aus Einheiten. Sie sind „organisch verwachsen“. Cantor fährt fort, dass er diesen Gesichtspunkt in Euklids Definition vermisst:

Cantor (1887): „Die Cardinalzahlen sowohl, wie die Ordnungstypen sind einfache Begriffsbildungen; jede von ihnen ist eine wahre Einheit (μονάς), weil in ihr eine Vielheit und Mannigfaltigkeit von Einsen einheitlich verbunden ist …

Sehen wir uns die Definition bei Euclides für die endliche Cardinalzahl an, so muß zunächst anerkannt werden, daß er die Zahl, ebenso wie wir es thun, ihrem wahren Ursprung gemäß, auf die Menge bezieht und aus der Zahl nicht etwa ein bloßes ‚Zeichen' macht, das Einzeldingen beim subjectiven Zählprozeß beigelegt wird. Es heißt in seinen Elementen, lib. VII: Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται und: 'Αριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συνκείμενον πλῆτος.

Dann scheint es mir aber, daß er die Einsen in der Zahl ebenso getrennt wähnt, wie die Elemente in der discreten Menge, auf welche sie sich bezieht. Wenigstens fehlt in der Euclidischen Definition der ausdrückliche Hinweis auf den einheitlichen Charakter der Zahl, welcher ihr durchaus wesentlich ist." See [Cantor 1887, p. 85]

In einer Anmerkung zu dieser Passage verweist Cantor auf die anderen griechischen Zahldefinitionen, um seine Sicht zu stützen, und er zitiert Nicomachus und Boethius [Cantor 1887, p. 252]. Die klassischen Traditionen werden in den „Beiträgen" von 1895, die sich an ein mathematisches Publikum richten, nicht erwähnt. Die Arbeit „Mitteilungen" von 1887 sind ein einzigartiges Dokument, das über Cantors genauere Vorstellungen der „organisch einheitlichen verbundenen" Einsen-Gebilde Auskunft gibt. Die Zahl 5 erscheint eher als

|-|-|-|-|

denn als

| | | | |.

Für die axiomatische Mengenlehre der Prädikatenlogik erster Stufe sind diese Erklärungen bloße Intuition. Analoges gilt für die Anschauung, was das „Ganze" in „Zusammenfassung zu einem Ganzen" bei der Mengenbildung ausmacht. Nur noch die Notation { … } deutet mit ihren elegant geschwungenen Klammern auf das hin, was gewisse Dinge zu einem Ding werden lässt, das aus diesen Dingen besteht.

Literatur

Alexander, H. G. (Hrsg.) 1956 *The Leibniz Clarke correspondence*. Manchester University Press, Manchester. Siehe auch [Robinet 1957].

Arnaud, A. / Nicole, P. 1662 *La logique ou l'art penser.* Logique du Port Royal. Paris.

Becker, Oskar 1957 *Das mathematische Denken der Antike*. Vandenhoeck & Rupprecht, Göttingen.

– 1964 *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. Zweite Auflage. Karl Alber, Freiburg.

Belna, Jean-Pierre 1996 *La Notion de Nombre chez Dedekind, Cantor, Frege. Théories, Conceptions, et Philosophie*. Librairie Philosophique J. Vrin, Paria.

Bernstein, Felix 1905 *Untersuchungen aus der Mengenlehre*. Mathematische Annalen 61 (1905), 117 – 155. Basierend auf Bernsteins Dissertation 1901.

Bochenski, Józef Maria 1978 *Formale Logik*. Nachdruck der zweiten erweiterten Auflage. Alber, Freiburg.

Boethius, Anicius 1867 *Boetii de institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque*. Hrsg.: Godofredus Friedlein. Teubner, Leipzig.

Bolzano, Bernard 1837 *Wissenschaftslehre*. Sulzbach.

– 1851 *Paradoxien des Unendlichen*. Reclam, Leipzig. Nachdruck: Felix Meiner, Hamburg 1955.

Cantor, Georg 1874 *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 77 (1874), 258 – 262.

– 1878 *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 84 (1878), 242 – 258.

– 1879 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 1.* Mathematische Annalen 15 (1879), 1 – 7.

– 1880 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 2.* Mathematische Annalen 17 (1880), 355 – 358.

– 1882 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 3.* Mathematische Annalen 20 (1882), 113 – 121.

– 1883 a *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 4.* Mathematische Annalen 21 (1883), 51 – 58.

– 1883 b *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 5.* Mathematische Annalen 21 (1883), 545 – 591.

– 1884 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr. 6.* Mathematische Annalen 23 (1884), 453 – 488.

– 1884 x *Prinzipien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung.* Zu Lebzeiten von Cantor nicht veröffentlichte Arbeit mit Datum 6. 11. 1884. Letztendlich veröffentlicht und mit Dokumenten versehen in: Acta Mathematica 124 (1970), S. 65 – 107. Herausgegeben von Ivor Grattan-Guinness.

– 1885 *Review of: Gottlob Frege, Die Grundlagen der Arithmetik. Koebner, Breslau, 1884.* Deutsche Literaturzeitung, VI. Jahrgang (1885), Spalten 728 – 729.

– 1887 *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. 1.* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91 (1887), 81 – 125, 252 – 270.

– 1888 *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. 2.* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 92 (1888), 240 – 265.

– 1890 *Zur Lehre vom Transfiniten. Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik.* C. E. M. Pfeffer (Norbert Stricker), Halle.

– 1895 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. (Erster Artikel).* Mathematische Annalen 46 (1895), 481 – 512.

– 1897 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. (Zweiter Artikel).* Mathematische Annalen 49 (1897), 207 – 246.

– 1932 *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Hrsg. Ernst Zermelo. Springer, Berlin. Nachdruck: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1962. Nachdrucke: Springer, Berlin 1980 and 1990.

– 1991 *Briefe.* Hrsg: Herbert Meschkowski, Winfried Nilson. Springer, Berlin.

Cantor, Georg / Dedekind, Richard 1937 *Briefwechsel Cantor – Dedekind.* Hrsg. E. Noether, J. Cavaillès. Hermann, Paris.

Cassiodorus Senator 1937 *Cassiodori Senatoris Institutiones.* Hrsg.: R. Mynors. Clarendon Press, Oxford. Verwendete Ausgabe: Nachdruck 1963, Oxford University Press („from corrected sheets of the first impression„).

Dauben, Joseph W. 1979 *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Harvard University Press, Cambridge Mass.

Dedekind, Richard 1888 *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig.

– 1930 – 1932 *Gesammelte mathematische Werke.* Drei Bände. Hrsg. Robert Fricke, Emmy Noether, Öystein Ore. Vieweg, Braunschweig. Nachdruck: Chelsea, New York, 1969.

Deiser, Oliver 2004 *Einführung in die Mengenlehre.* Zweite Auflage. Springer, Berlin.

– 2005 *Der Multiplikationssatz der Mengenlehre.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 107 (2005), 89 – 109.

– 2006 *Orte, Listen, Aggregate.* Habilitationsschrift FU Berlin.

– 2008 *Reelle Zahlen.* Zweite Auflage. Springer, Berlin.

– 2010 *Essay über Ernst Zermelos Artikel „Ueber die Addition transfiniter Cardinalzahlen“.* in: Ernst Zermelo. Collected Works. Vol. 1, 52 – 70. Hrsg: H. -D. Ebbinghaus, C. Fraser, A. Kanamori. Springer, Berlin.

Dubislav, Walter 1927 *Über die Definition.* Zweite Auflage. (Erstauflage 1926). Berlin.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter 2007 *Ernst Zermelo. An approach to his life and work.* In Zusammenarbeit mit Volker Peckhaus. Springer, Berlin.

Euklid 1884 *Euclidis Elementa. II.* Hrsg: J. Heiberg. Teubner, Leipzig.

Eisler, Rudolf 1904 *Wörterbuch der philosophischen Begriffe.* Zweite Auflage. Zwei Bände. Ernst Siegfried Mittler und Sohn, Berlin.

Felgner, Ulrich 2002 *Der Begriff der Kardinalzahl.* in [Hausdorff 2002], 634 – 644.

Ferreirós, José 1999 *Labyrinths of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics.* Birkhäuser, Basel.

Fine, Gail 1980 *The one over many.* The Philosophical Review 89 (1980), 197 – 240.

Fine, Kit 1998 *Cantorian abstraction: A reconstruction and defense.* Journal of Philosophy (1998), 599 – 634.

Fraenkel, Abraham 1928 *Einleitung in die Mengenlehre.* Dritte erweiterte Auflage. Springer, Berlin.

– 1961 *Abstract Set Theory.* Zweite Auflage. North-Holland, Amsterdam.

Frege, Gottlob 1884 *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Wilhelm Koebner, Breslau. Verwendete Ausgabe: Felix Meiner, Hamburg 1986.

– 1892 *Review of [Cantor 1890].* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 100 (1892), 269 – 272. Auch in [Frege 1967, 163 – 166].

– 1967 *Kleine Schriften.* Olms, Hildesheim.

– 1976, 1983 *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel.* Bd. 1: Nachgelassene Schriften (1983, zweite Auflage), Bd. 2: Wissenschaftlicher Briefwechsel (1976). Meiner, Hamburg.

– 1986 *Grundlagen der Arithmetik.* Centenarausgabe (Hrsg.: C. Thiel). Meiner, Hamburg.

Galilei, Galileo 1638 *Discorsi e dimostrazioni matematiche.* Leiden, 1638.

Gericke, Helmuth 1970 *Geschichte des Zahlbegriffs.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

– 1973 *Vorgeschichte der Mengenlehre.* Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 20 (1973), 151 – 170.

– 1977 *Wie vergleicht man unendliche Mengen?* Sudhoffs Archiv 61 (1977), 54 – 65.

Grattan-Guinness, Ivor 1970 = *[Cantor 1884x].*

– 1996 *Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclid's Elements: How did he handle them?* Historia Mathematica 23 (1996), 355 – 375.

– 2000 *The Search for Mathematical Roots, 1870 – 1930. Logic, Set Theories and The Foundations of Mathematics from Cantor Through Russell to Gödel.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

Hausdorff, Felix 1905 *Rezension: Bertrand Russell, The principles of mathematics.* Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie und Sociologie 29 (1905), S. 119 – 124.

– 1908 *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen.* Mathematische Annalen 65 (1908), S. 435 – 505.

– 1914 *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit & Comp., Leipzig. Nachdrucke: Chelsea, New York 1949, 1965, 1978.

– 1927 *Mengenlehre.* Walter de Gruyter, Berlin.

– 1935 *Mengenlehre.* Dritte Auflage. Walter de Gruyter, Berlin.

– 2002 *Grundzüge der Mengenlehre.* Nachdruck mit Einleitung, Anmerkungen und Essays. Band II von „Gesammelte Werke". Hrsg. Egbert Brieskorn et al. Springer, Berlin.

Hallett, Michael 1984 *Cantorian set theory and limitation of size.* Clarendon Press, Oxford.

Heath, Sir Thomas 1931 *A manual of Greek Mathematics.* Oxford University Press, 1931. Nachdruck: Dover, New York 2003.

– 1949 *Mathematics in Aristotle.* Clarendon Press, Oxford.

Heijenoort, Jean van (Hrsg.) 1967 *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931.* Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Hessenberg, Gerhard 1906 *Grundbegriffe der Mengenlehre.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1906.

– 1913 *Mengenlehre.* in: Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Hrsg: F. Auerbach. Band 3 (1913), 69 – 81.

Husserl, Edmund 1887 *Über den Begriff der Zahl. Psychologische Analysen.* Habilitationsschrift, Halle.

– 1891 *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen. I. Band.* C. E. M. Pfeffer (Norbert Stricker), Halle.

Iamblichus of Chalcis 1894 *Iamblichi in Nicomachi arithmeticam introductionem liber.* Hrsg.: Hermenegildus Pistelli, Udalricus Klein. Teubner, Leipzig. Verwendete Ausgabe: Nachdruck 1975, Teubner, Stuttgart.

Kanamori, Akihiro 1994 *The Higher Infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings.* Springer, Berlin.

– 1996 *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen.* The Bulletin of Symbolic Logic 2 (1996), 1 – 71.

– 2006 *Levy and set theory.* Annals of Pure and Applied Logic 140 (2006), 233 – 252.

Lavine, Shaughan 1994 *Understanding the Infinite.* Harward University Press, Cambridge.

Levy, Azriel 1969 *The definability of cardinal numbers.* in: Foundations of mathematics. Symposium papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel. Hrsg: J. J. Bulloff, T. C. Holyoke, S. W. Hahn. Springer, Berlin. 15 – 38.

Maier, Anneliese 1949 *Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert.* Edizioni di storia e letteratura, Rome. (Nachdruck mit Zusätzen 1966.)

Moore, Gregory H. 1982 *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence.* Springer, New York.

Neumann, John von 1923 *Zur Einführung der transfiniten Zahlen.* Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum 1922/1923, Szeged, 199 – 208.

– 1928 *Die Axiomatisierung der Mengenlehre.* Mathematische Zeitschrift 27 (1928), 669 – 752.

– 1928b *Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre.* Mathematische Annalen 99 (1928), 373 – 391.

Nicomachus of Gerasa 1866 *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductiones Arithmeticae libri II.* Hrsg.: R. Hoche. Teubner, Leipzig.

– 1926 *Introduction to Arithmetic.* Übersetzt aus dem Griechischen ins Englische von Martin Luther D'Ooge. Macmillan, New York.

Parsons, Charles 1965 *Frege's theory of numbers.* in: Philosophy in America. Hrsg: Max Black. Cornell University Press, Ithaca. 180 – 203.

Pincus, David 1974 *Cardinal representatives.* Israel Journal of Mathematics 18 (1974), 321 – 344.

Peano, Giuseppe 1891 *Sul concetto di numero.* Rivista di matematica 1 (1891), 87 – 102, 256 – 276.

– 1894 *Notations de Logique mathematique.* Turin.

– 1957 / 1958 / 1959 *Opere Scelte.* three volumes. Edizioni Cremonese, Rome.

Purkert, Walter 1986 *Georg Cantor und die Antinomien der Mengenlehre.* Bulletin de la Société Mathématique de Belgique 38 (1986), 313 – 327.

Prantl, Carl von 1955 *Geschichte der Logik im Abendlande.* Vier Bände. Akademische Druck und Verlagsanstalt, Graz. (Nachdruck der Originalausgabe bei S. Hirzel, Leipzig: 1855 (Band I), 1885 (Band II, zweite Auflage), 1867 (Band III), 1870 (Band IV).

Rand, E. K. 1938 *The new Cassiodorus.* Speculum 13, (1938), 433 – 447.

Ritter, J. / Gründer, K. / Gabriel, G. (Hrsg.) 1971 – 2007 *Historisches Wörterbuch der Philosophie.* 13 Bände. Schwabe, Basel.

Robinet, André (Hrsg.) 1957 *Correspondance Leibniz-Clarke. Présentée d'après les manuscrits originaux des bibliothèques de Hanovre et de Londres.* Presses Universitaires de France, Paris.

Russell, Bertrand 1903 *The Principles of Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge.

– 1908 *Mathematical logic as based on the theory of types.* American Journal of Mathematics 30 (1908), 222 – 262.

Schoenflies, Arthur 1900 *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8 (2), I – VI, 1 – 251. Teubner, Leipzig.

– 1908 *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Teil II.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2. Supplement. Teubner, Leipzig.

Scholz, Heinrich / Schweitzer, Hermann 1935 *Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion. Eine Theorie der Definitionen durch Bildung von Gleichheitsverwandtschaften.* Forschungen zur Logistik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Herausgegeben von Heinrich Scholz. Heft 3. Felix Meiner, Leipzig.

Scott, Dana 1955 *Definitions by abstraction in axiomatic set theory.* Bulletin of the American Mathematical Society 61 (1955), 442.

Steiner, Jacob 1867 *Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Theil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften.* Bearbeitet von Heinrich Schröter. Teubner, Leipzig 1867.

Stenzel, Julius 1924 *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles.* Teubner, Leipzig.

Szabó, Árpád 1969 *Anfänge der griechischen Mathematik.* Oldenbourg, München.

– 1994 *Die Entfaltung der griechischen Mathematik.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

Tait, William 1996 *Frege versus Cantor and Dedekind: On the concept of number.* in: Frege: Importance and Legacy. Hrsg. M. Schirn. de Gruyter, Berlin. 70 – 113.

– 2000 *Cantor's Grundlagen and the paradoxes of set theory.* in: Between Logic and Intuition. Essays in Honor of Charles Parsons. Hrsg: G. Sher/ R. Tieszen. Cambridge University Press, Cambridge. 269 – 290.

Tsouyopoulos, Nelly 1972 *Der Begriff des Unendlichen von Zenon bis Galilei.* Rete, Strukturgeschichte der Naturwissenschaften 1 (1972), 245 – 272.

Ueberweg, Friedrich 1882 *System der Logik und Geschichte der logischen Lehren. Fünfte, verbesserte, vermehrte und mit einem Namen- und Sach-Register versehene Auflage, bearbeitet und herausgegeben von Jürgen Bona Meyer.* Fünfte Auflage. (Erstauflage 1857). Adolph Marcus, Bonn.

Waerden, Bartel L. van der 1956 *Erwachende Wissenschaft.* Birkhäuser, Basel.

– 1979 *Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft.* Artemis, Zürich.

Weyl, Hermann 1990 *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.* Sechste Auflage. (Erstauflage 1928.) Oldenbourg, München.

Young, William / Chisholm-Young, Grace 1906 *The Theory of Sets of Points.* Cambridge University Press, Cambridge.

Zermelo, Ernst 1900/01 *Mengenlehre. Vorlesung im W.S. 1900/1.* Handschriftliche Notizen zu Zermelos erster Vorlesung zur Mengenlehre im Wintersemester 1900/01 in Göttingen. Mit späteren Zusätzen. Universitätsarchiv Freiburg, 0129/150.

– 1908 *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.* Mathematische Annalen 65 (1908), 261 – 281.

– 1915 *Notizen über Odinalzahlen.* Universitätsarchiv Freiburg, 0129/261.

– 1932 = [Cantor 1932]

Zeuthen, Hieronymus Georg 1912 *Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter.* Kultur der Gegenwart (III, 1, 1), Leipzig. Nachdruck: Teubner, Stuttgart 1966.

Ziehen, Theodor 1917 *Das Verhältnis der Logik zur Mengenlehre.* Reuther & Reichard, Berlin.