

## Einfache Sätze über unendliche Mengen

---

Wir leiten aus der Dedekind-Definition einige elementare Resultate ab.

**Satz** (*Übertragung der Unendlichkeit zwischen Mengen gleicher Mächtigkeit*)

Seien  $A$  und  $B$  gleichmächtige Mengen. Dann gilt:  
Ist  $A$  unendlich, so ist auch  $B$  unendlich.

**Beweis**

Sei  $A' \subset A$ , und sei  $f : A \rightarrow A'$  bijektiv. Weiter sei  $h : A \rightarrow B$  bijektiv.  
Wir setzen

$$g = h \circ f \circ h^{-1} : B \rightarrow B$$

Dann ist  $g$  injektiv. Ist  $x \in A - A'$ , so ist  $h(x) \notin \text{rng}(g)$ . Genauer gilt

$$\text{rng}(g) = h''A' \subset h''A = B.$$

Also ist  $g : B \rightarrow \text{rng}(g) \subset B$  ein Zeuge für die Unendlichkeit von  $B$ .

Der nächste Satz zeigt die Übertragung der Unendlichkeit auf jede Obermenge einer unendlichen Menge:

**Satz** (*Übertragung der Unendlichkeit auf Obermengen*)

Seien  $A, B$  Mengen, und es gelte  $A \subseteq B$ . Dann gilt:  
Ist  $A$  unendlich, so ist auch  $B$  unendlich.

**Beweis**

Sei  $A' \subset A$  und  $f : A \rightarrow A'$  bijektiv. Sei

$$g = f \cup \text{id}_{B-A},$$

sodass  $g(b) = f(b)$  für  $b \in A$ ,  $g(b) = b$  für  $b \in B - A$ .

Dann ist  $g$  injektiv. Ist  $x \in A - A'$ , so ist  $x \notin \text{rng}(g)$ . Genauer gilt

$$\text{rng}(g) = A' \cup (B - A) \subset B.$$

Also ist  $g : B \rightarrow \text{rng}(g) \subset B$  ein Zeuge für die Unendlichkeit von  $B$ .

Als Korollar zu diesen beiden Sätzen erhalten wir:

**Korollar** (*Übertragung der Unendlichkeit auf gleichmächtige und größere Mengen*)

Seien  $A, B$  Mengen, und es gelte  $|A| \leq |B|$ . Dann gilt:  
Ist  $A$  unendlich, so ist auch  $B$  unendlich.

**Beweis**

Sei  $h : A \rightarrow B$  injektiv, und sei  $C = \text{rng}(h)$ . Dann ist  $|A| = |C|$ , also ist  $C$  unendlich. Aber  $C \subseteq B$ , also ist auch  $B$  unendlich.

Interessanter sind die Reduktionen von unendlichen Mengen, die die Unendlichkeit erhalten. Zunächst zeigen wir, dass ein Tropfen an der Unendlichkeit des Meeres nichts ändert.

**Satz** (*Entfernen eines Elementes*)

Sei  $A$  eine unendliche Menge. Weiter seien  $a \in A$  und  $B = A - \{a\}$ .  
Dann ist auch  $B$  unendlich.

**Beweis**

Sei  $A' \subset A$  und  $f: A \rightarrow A'$  bijektiv.

Sei  $b \in A - A' (\neq \emptyset)$ . Wir setzen:

$$g = f|_{(A - \{b\})}.$$

Dann ist  $g$  injektiv, und  $f(b) \notin \text{rng}(g)$ .

Aber  $f(b) \neq b$  wegen  $\text{rng}(f) = A'$ . Also ist

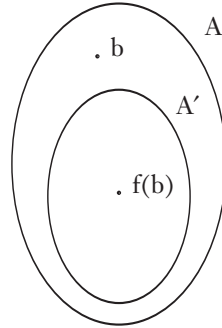
$$g: A - \{b\} \rightarrow A - \{b, f(b)\} \subset A - \{b\}$$

ein Zeuge für die Unendlichkeit von  $A - \{b\}$ .

Aber offenbar

$$|A - \{a\}| = |A - \{b\}|,$$

also ist auch  $A - \{a\}$  unendlich nach dem Satz oben.



**Korollar** (*Hinzufügen eines Elementes*)

Seien  $B$  eine endliche Menge und  $a$  ein beliebiges Objekt.

Weiter sei  $A = B \cup \{a\}$ . Dann ist auch  $A$  endlich.

**Beweis**

*Andernfalls* ist  $A$  unendlich (und  $a \notin B$ ). Nach dem Satz oben ist dann  $A - \{a\} = B$  unendlich, *im Widerspruch* zur Voraussetzung.

Wiederholte Anwendung des Korollars ergibt, dass  $B \cup \{a_1, \dots, a_n\}$  endlich ist für endliche  $B$  und für beliebige Objekte  $a_1, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere sind also (für  $B = \emptyset$ ) alle Mengen der Form  $\{a_1, \dots, a_n\}$  endlich. Wir wissen noch nicht, dass umgekehrt alle endlichen Mengen die Gestalt  $\{a_1, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{N}$ , haben; wir werden dies unten zeigen.

Für weitergehende Resultate wird die rein funktionale Definition der Unendlichkeit im rein funktionalen Kontext recht schwerfällig. Der Nachweis, dass die Vereinigung zweier – oder stärker endlich vieler – endlicher Mengen wieder endlich ist, bereitet bereits Schwierigkeiten. (Der Leser mag versuchen, dies im Stil der obigen Beweise zu zeigen). An dieser Stelle kommen uns nun die natürlichen Zahlen zu Hilfe, ähnlich wie in der Mächtigkeitstheorie zum Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein. Wie dort wäre es eher künstlich, die Stärke rekursiver Definitionen und induktiver Beweise beim Heben schwererer Gewichte nicht zu benutzen.

## Unendlichkeit und natürliche Zahlen

---

Zeugen für die Unendlichkeit einer Menge  $A$  sind Injektionen von  $A$  nach  $A$ , die Werte auslassen. Andererseits ist eine solche Injektion auf ganz  $A$  definiert, insbesondere also auch auf den Werten, die sie selbst auslässt. Dies führt zur folgenden allgemeinen Definition.

**Definition** (*Orbit eines Punktes*)

Sei  $g : A \rightarrow A$  eine Funktion, und sei  $x \in A$ .  
 Dann ist  $S_x : \mathbb{N} \rightarrow A$ , der *Orbit* von  $x$  unter  $g$  in  $A$ , rekursiv wie folgt definiert:

$$S_x(0) = x,$$

$$S_x(n + 1) = g(S_x(n)) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Ein Orbit  $S$  heißt *azyklisch*, falls  $S$  injektiv ist. Andernfalls heißt  $S$  *zyklisch*.  
 Ein  $x \in A$  heißt *azyklisch*, falls  $S_x$  azyklisch ist. Andernfalls heißt  $x$  *zyklisch*.

Der Buchstabe  $S$  erinnert hierbei an „Spur“. Der Orbit  $S_x$  von  $x$  unter  $g$  beschreibt die Bahn des Punktes  $x$ , wenn wiederholt die Funktion  $g$  auf  $x$  und seine Bilder angewendet wird.

Ist  $g(x) = x$ , so ist  $S_x(n) = x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Ist  $g(x) = y$ ,  $g(y) = x$  und  $x \neq y$ , so ist  $S_x(n) = x$  für gerade  $n$  und  $S_x(n) = y$  für ungerade  $n$ . Das Wort „zyklisch“ wird zudem motiviert durch die folgende Übung.

**Übung** (*Orbitalbahn eines zyklischen Punktes*)

Sei  $g : A \rightarrow A$  eine Funktion, und sei  $x \in A$  zyklisch. Dann gilt:

Es existieren  $n_0 \in \mathbb{N}$  und  $m \in \mathbb{N} - \{0\}$  mit der Eigenschaft:

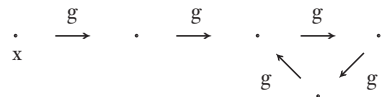
Für alle  $n, n' \geq n_0$  gilt:

$$S_x(n) = S_x(n') \quad \text{gdw} \quad n \equiv_m n'.$$

Ist  $g$  injektiv, so ist  $n_0 = 0$  geeignet.

[Zur Erinnerung:  $n \equiv_m n'$  *gdw*  $n$  und  $n'$  haben den gleichen Rest bei Division durch  $m$ .]

Das (eindeutig bestimmte) derartige  $m$  heißt dann der *Zyklus* von  $x$ , das kleinste derartige  $n_0$  die *Vorlaufzeit* von  $x$ .



Eine weitere, etwas informal formulierte Übungsaufgabe für den Leser ist, sich die möglichen Orbit-Typen unter nicht injektiven und unter surjektiven Funktionen  $g : A \rightarrow A$  zu überlegen. Der „Weg rückwärts“ von  $x$  zu einem  $y$  mit  $g(y) = x$  ist für surjektive  $g$  immer möglich, aber im Allgemeinen nicht eindeutig. Für Injektionen dagegen kann man weiter den Rückwärtsorbit eines Punktes  $x$  definieren (solange entsprechende Urbilder existieren). Für Bijektionen gibt es dann stets einen unendlichen Vorwärts- und Rückwärtsorbit,