6. Unendliche Mengen

Wir haben $|A| = |B|$ als „A und B haben die gleiche Größe" interpretiert, wobei „gleiche Größe" durch die Existenz einer Bijektion zwischen A und B definiert wird. Gilt $|A| = |B|$, so ist eine vollständige Paarbildung der Elemente von A und B möglich, die Elemente der Mengen entsprechen sich vollkommen, wenn wir eine bestimmte Abbildung zugrunde legen.

Es taucht nun das merkwürdige und zunächst irritierende Phänomen auf, dass manche Mengen gleich groß sind zu einem echten Teil von sich selbst: Es gibt Mengen A, B mit $|A| = |B|$ und $B \subset A$.

Man kann dieses Phänomen zur Definition der Unendlichkeit einer Menge benutzen, die nur von den elementaren Mächtigkeitsbegriffen und nicht von einer irgendwie definierten Anzahl der Elemente einer Menge Gebrauch macht, und wir werden diesem Weg folgen. Vor einer derartigen Definition stellen wir zur Motivation eine an dieser Stelle fast schon etwas naive Frage, und betrachten dann noch ein merkwürdiges Gebäude, das sogenannte „Hilbertsche Hotel".

Die frühe Literatur zur Mengenlehre verwendete viele didaktisch ambitionierte Seiten auf die Diskussion der vermeintlich paradoxen Eigenschaften unendlicher Mengen, und vor Cantor schrieb Bolzano ein ganzes Buch über „Paradoxien des Unendlichen". Heute sind wir durch eine viel strenger aufgebaute und logisch durchtrainierte Mathematik daran gewöhnt, dass Begriffe wie „ist größer als" oder „unendlich" erst durch Definition zu Begriffen der Mathematik werden. Die Intuition spielt für die Formulierung einer Definition eine große Rolle, hat sich dann aber an deren Konsequenzen zu orientieren und nicht umgekehrt. Die sorgfältige mathematische Entfaltung einer Definition zeigt zum Glück zumeist, dass hier keine subtile Gehirnwäsche stattfindet, sondern eine Aufklärung im besten platonischen Sinne: Schattenhafte verschwommene Bilder werden schließlich farbig und scharf umrissen. Die Erfahrung ist die des Findens und Entdeckens und nicht die des eigentlichen Erschaffens oder auch nur des freien Gestaltens nach festen Spielregeln.

Gibt es mehr natürliche oder mehr gerade Zahlen?

Seien $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$ und $\mathbb{G} = \{ 0, 2, 4, 6, \dots \}$ die Menge der geraden Zahlen. Definiere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{G}$ durch

$f(n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{G}$ bijektiv, also gilt $|\mathbb{N}| = |\mathbb{G}|$.
Offenbar ist aber $\mathbb{G} \subset \mathbb{N}$.

Ist das Ergebnis $\mathbb{G}$ *und* $\mathbb{N}$ *sind gleich groß* nicht paradox, wo doch wegen $\mathbb{G} \subset \mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{G}$ offensichtlich kleiner ist als $\mathbb{N}$? Keineswegs, denn hier liegen verschiedene Interpretationen von „groß“ vor. Beide sind natürlich, aber sie stimmen im Allgemeinen nicht überein.

A ist größergleich als B falls *B ist Teilmenge von A* ist ein sinnvoller Größenbegriff, und er wird in der Mengenlehre oft verwendet. Er ist aber vom Begriff der Größe, der durch Bijektionen gegeben wird, verschieden, und hinsichtlich des Zieles, dass die Größe einer Menge Zahlcharakter haben soll, ist er unbrauchbar: Die Vergleichbarkeit $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ gilt nicht für beliebige Mengen A und B.

Hausdorff (1914): „Unsere Beispiele […] zeigten ja, dass eine Menge recht wohl mit einer ihrer echten Teilmengen äquivalent sein kann, z. B. die Menge der natürlichen Zahlen n mit der Menge der Quadratzahlen n^2. Diese Eigenschaft kann offenbar nur unendlichen Mengen zukommen und kommt ihnen, wie wir sehen werden […], auch stets zu. Wenn wir also den Zeichen = < > die übliche Bedeutung lassen und insbesondere verlangen wollen, dass von den drei Fällen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} > \mathfrak{b}$$

immer nur einer eintreten kann, so werden wir darauf verzichten müssen, jeder echten Teilmenge von A eine Kardinalzahl $< \mathfrak{a}$ zu geben; wir müssen das geheiligte Axiom ‚totum parte majus‘ verletzen, wie wir uns überhaupt darauf gefasst machen müssen, dass die Rechnung mit unendlichen Kardinalzahlen in vielen Punkten von der mit endlichen abweichen wird, ohne dass darin der geringste Einwand gegen diese unendlichen Zahlen zu erblicken wäre.“

Das Hilbertsche Hotel

Fast schon zur mathematischen Folklore geworden ist das Hilbertsche Hotel. Dieses Hotel hat für jede natürliche Zahl ein Zimmer:

Alle Zimmer sind belegt. Ein neuer Gast kann aber wie folgt untergebracht werden:

(i) Jeder alte Gast zieht von Zimmer **n** nach Zimmer **n + 1.**

(ii) Der neue Gast wird in Zimmer **0** einquartiert.

Derartige Möglichkeiten des Platzmachens durch Verschiebung sind gerade charakteristisch für unendliche Mengen. Es ist vielleicht ein Vergnügen für den Leser sich zu überlegen, wie er neue Gäste $G_0, G_1, \dots, G_n, \dots, n \in \mathbb{N}$, die alle gleichzeitig ankommen, in einem bereits ausgebuchten Hilbertschen Hotel unterbringen würde.

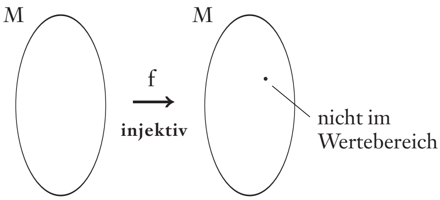
Dedekinds Definition der Unendlichkeit

Definition *(Unendlichkeit nach Dedekind)*

Sei M eine Menge. M heißt *unendlich*, falls es eine echte Teilmenge N von M gibt, die sich bijektiv auf M abbilden lässt, d. h. es gibt ein $N \subset M$ mit $|N| = |M|$.

Eine Menge heißt *endlich*, falls sie nicht unendlich ist.

Anders formuliert: Eine Menge M ist unendlich, falls es eine Injektion $f : M \to M$ gibt, die mindestens einen Wert auslässt, d. h. $\mathrm{rng}(f) \neq M$.



Nach obigem Beispiel ist $\mathbb{N}$ eine unendliche Menge – wie es sein soll. Allgemeiner gilt:

Übung

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ unbeschränkt in $\mathbb{N}$, d. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in A$ mit $n \leq m$. Dann ist A unendlich.

[Wir definieren $g : A \to A$ durch $g(n)$ = „das kleinste $m \in A$ mit $n < m$“.]

Dedekind (1888): „Ein System [Menge] S heißt unendlich, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich [gleichmächtig] ist; im entgegengesetzten Falle heißt S ein endliches System …

[Fußnote zu dieser Definition:] … In dieser Form habe ich die Definition des Unendlichen, welche den Kern meiner ganzen Untersuchung bildet, im September 1882 Herrn G. Cantor und schon mehrere Jahre früher auch den Herren Schwarz und Weber mitgeteilt. Alle anderen mir bekannten Versuche, das Unendliche vom Endlichen zu unterscheiden, scheinen mir so wenig gelungen zu sein, dass ich auf eine Kritik derselben verzichten zu dürfen glaube.“

Der Leser vergleiche hierzu Bolzanos „Paradoxien des Unendlichen“ (1851), § 21 f.

Wir werden unten eine Reihe von „gelungenen“ äquivalenten Definitionen von *unendlich* und *endlich* kennenlernen, wobei die ansprechendste unter ihnen die natürlichen Zahlen verwendet. Dedekinds Definition bleibt in ihrem Purismus ungeschlagen, auch wenn sich im axiomatischen Aufbau der Mengenlehre eine Definition über die natürlichen Zahlen als einfacher erweist, im Sinne des geringeren Gewichts der die Definition inhaltlich tragenden Axiome.

Cantor hat, obwohl er mit dem Phänomen hinter der Dedekindschen Definition und mit ihr selbst vertraut war, viel kompliziertere, aber dafür auch sehr interessante Merkmale der Endlichkeit an die Spitze gestellt. So schreibt er in seiner philosophischen Arbeit von 1887:

Cantor (1887): „Unter einer *endlichen [nichtleeren] Menge* verstehen wir eine solche M, welche aus *einem* ursprünglichen Element durch sukzessive Hinzufügung neuer Elemente derartig hervorgeht, dass auch *rückwärts* aus M *durch sukzessive* Entfernung der Elemente *in umgekehrter Ordnung* das ursprüngliche Element gewonnen werden kann…
Als *durchaus wesentliches* Merkmal *endlicher* Mengen muss es angesehen werden, dass eine solche *keinem ihrer [echten] Bestandteile* äquivalent ist. Denn eine aktual unendliche Menge ist *immer* so beschaffen, dass auf mehrfache Weise ein Bestandteil von ihr bezeichnet werden kann, der ihr äquivalent ist.“

Cantors endliche Mengen sind also den Stapeln der Informatik ähnlich, die durch schrittweises „push“ an Höhe gewinnen, aber auch durch schrittweises „pop“ wieder reduziert werden können. Ein Stapel unendlicher Höhe bestehend aus allen natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ in ihrer natürlichen Ordnung ist ideell vorstellbar. Man kann ihn sich durch sukzessives „push“ aufgebaut denken, dagegen kann er durch „pop“ nicht mehr von oben abgebaut werden, weil er kein oberstes Objekt mehr besitzt.

In der Vorstellung Cantors sind Mengen zwar extensional bestimmt, aber dennoch oft mit einer inneren Ordnung versehen. Konzeptionell wie intuitiv sind heute Mengen nackt und ungeordnet. Auch Ordnungen auf ihnen, wie etwa $<_{\mathbb{N}}$, sind, für sich selbst genommen, ungeordnete Mengen.

Dedekind hat aus seiner Definition die „Unendlichkeit der Gedankenwelt“ abgeleitet (vgl. das Zitat auf dem Vorblatt des Buches):

Hessenberg (1906): „Einer der interessantesten Versuche, die Existenz transfiniter Mengen zu beweisen, ist der von Dedekind unternommene. Es sei a irgend ein Gegenstand des Denkens, so kann ich das Urteil fällen: a ist ein Gegenstand meines Denkens. Dieses Urteil $\varphi(a)$ ist selbst ein Gegenstand des Denkens. Die Zuordnung φ zwischen a und $\varphi(a)$ ist umkehrbar eindeutig [injektiv] und bildet die Menge aller Gedankendinge auf einen echten Teil ihrer selbst ab, da nicht jeder Gegenstand des Denkens die Form eines Urteils, daher a fortiori nicht die Form des speziellen Urteils $\varphi(a)$ hat. Demnach ist die Menge aller Gedankendinge transfinit.“

Die Idee ist hier gerade, die natürlichen Zahlen nicht zu verwenden. Sonst könnte man analog argumentieren: Die Zuordnung φ, die $n \in \mathbb{N}$ auf $n + 1$ abbildet, ist injektiv. Natürliche Zahlen kommen erst später, die Unendlichkeit wohnt dem Denken selber inne, und dieses braucht nicht erst das Zählen, um sich dieser Tatsache bewusst zu werden. Mathematisch lässt sich das Argument sicher nicht als Beweis der Existenz unendlicher Mengen auffassen. Philosophisch ist die Idee zweifellos interessant, und kulturgeschichtlich ist der Versuch, die Existenz transfiniter Mengen aus einem iterierten Akt der Selbstreflexion zu beweisen, ein schönstes Beispiel aufklärerischen Denkens. Der Mensch erkennt durch bloße Selbstbeobachtung die unendlichen Möglichkeiten seines Verstandes. Nicht zufällig ist es Hessenberg, der Dedekinds Versuch würdigt: Hessenberg war philosophisch gesehen Neukantianer. (Sein Buch von 1906 erschien zuerst in den „Abhandlungen der Friesschen Schule“.)

Einfache Sätze über unendliche Mengen

Wir leiten aus der Dedekind-Definition einige elementare Resultate ab.

Satz *(Übertragung der Unendlichkeit zwischen Mengen gleicher Mächtigkeit)*

Seien A und B gleichmächtige Mengen. Dann gilt:
Ist A unendlich, so ist auch B unendlich.

Beweis

Sei $A' \subset A$, und sei $f : A \to A'$ bijektiv. Weiter sei $h : A \to B$ bijektiv.
Wir setzen

$$g \;=\; h \circ f \circ h^{-1} : B \to B$$

Dann ist g injektiv. Ist $x \in A - A'$, so ist $h(x) \notin \mathrm{rng}(g)$. Genauer gilt

$$\mathrm{rng}(g) \;=\; h''A' \;\subset\; h''A \;=\; B.$$

Also ist $g : B \to \mathrm{rng}(g) \subset B$ ein Zeuge für die Unendlichkeit von B.

Der nächste Satz zeigt die Übertragung der Unendlichkeit auf jede Obermenge einer unendlichen Menge:

Satz *(Übertragung der Unendlichkeit auf Obermengen)*

Seien A, B Mengen, und es gelte $A \subseteq B$. Dann gilt:
Ist A unendlich, so ist auch B unendlich.

Beweis

Sei $A' \subset A$ und $f : A \to A'$ bijektiv. Sei

$$g \;=\; f \cup \mathrm{id}_{B-A},$$

sodass $g(b) = f(b)$ für $b \in A$, $g(b) = b$ für $b \in B - A$.
Dann ist g injektiv. Ist $x \in A - A'$, so ist $x \notin \mathrm{rng}(g)$. Genauer gilt

$$\mathrm{rng}(g) \;=\; A' \cup (B - A) \;\subset\; B.$$

Also ist $g : B \to \mathrm{rng}(g) \subset B$ ein Zeuge für die Unendlichkeit von B.

Als Korollar zu diesen beiden Sätzen erhalten wir:

Korollar *(Übertragung der Unendlichkeit auf gleichmächtige und größere Mengen)*

Seien A, B Mengen, und es gelte $|A| \leq |B|$. Dann gilt:
Ist A unendlich, so ist auch B unendlich.

Beweis

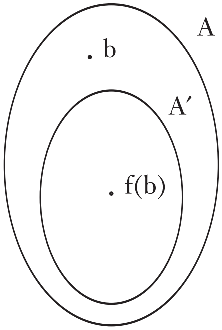
Sei $h : A \to B$ injektiv, und sei $C = \mathrm{rng}(h)$. Dann ist $|A| = |C|$, also ist C unendlich. Aber $C \subseteq B$, also ist auch B unendlich.

Interessanter sind die Reduktionen von unendlichen Mengen, die die Unendlichkeit erhalten. Zunächst zeigen wir, dass ein Tropfen an der Unendlichkeit des Meeres nichts ändert.

Satz *(Entfernen eines Elementes)*

Sei A eine unendliche Menge. Weiter seien $a \in A$ und $B = A - \{ a \}$.
Dann ist auch B unendlich.

Beweis



Sei $A' \subset A$ und $f : A \to A'$ bijektiv.
Sei $b \in A - A'$ ($\neq \emptyset$). Wir setzen:

$$g = f \,|\, (A - \{ b \}).$$

Dann ist g injektiv, und $f(b) \notin \mathrm{rng}(g)$.
Aber $f(b) \neq b$ wegen $\mathrm{rng}(f) = A'$. Also ist

$$g : A - \{ b \} \to A - \{ b, f(b) \} \subset A - \{ b \}$$

ein Zeuge für die Unendlichkeit von $A - \{ b \}$.
Aber offenbar

$$|A - \{ a \}| = |A - \{ b \}|,$$

also ist auch $A - \{ a \}$ unendlich nach dem Satz oben.

Korollar *(Hinzufügen eines Elementes)*

Seien B eine endliche Menge und a ein beliebiges Objekt.
Weiter sei $A = B \cup \{ a \}$. Dann ist auch A endlich.

Beweis

Andernfalls ist A unendlich (und $a \notin B$). Nach dem Satz oben ist dann $A - \{ a \} = B$ unendlich, *im Widerspruch* zur Voraussetzung.

Wiederholte Anwendung des Korollars ergibt, dass $B \cup \{ a_1, \ldots, a_n \}$ endlich ist für endliche B und für beliebige Objekte $a_1, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere sind also (für $B = \emptyset$) alle Mengen der Form $\{ a_1, \ldots, a_n \}$ endlich. Wir wissen noch nicht, dass umgekehrt alle endlichen Mengen die Gestalt $\{ a_1, \ldots, a_n \}$, $n \in \mathbb{N}$, haben; wir werden dies unten zeigen.

Für weitergehende Resultate wird die rein funktionale Definition der Unendlichkeit im rein funktionalen Kontext recht schwerfällig. Der Nachweis, dass die Vereinigung zweier – oder stärker endlich vieler – endlicher Mengen wieder endlich ist, bereitet bereits Schwierigkeiten. (Der Leser mag versuchen, dies im Stil der obigen Beweise zu zeigen). An dieser Stelle kommen uns nun die natürlichen Zahlen zu Hilfe, ähnlich wie in der Mächtigkeitstheorie zum Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein. Wie dort wäre es eher künstlich, die Stärke rekursiver Definitionen und induktiver Beweise beim Heben schwererer Gewichte nicht zu benutzen.

Unendlichkeit und natürliche Zahlen

Zeugen für die Unendlichkeit einer Menge A sind Injektionen von A nach A, die Werte auslassen. Andererseits ist eine solche Injektion auf ganz A definiert, insbesondere also auch auf den Werten, die sie selbst auslässt. Dies führt zur folgenden allgemeinen Definition.

Definition *(Orbit eines Punktes)*

Sei $g : A \to A$ eine Funktion, und sei $x \in A$.
Dann ist $S_x : \mathbb{N} \to A$, der *Orbit* von x unter g in A, rekursiv wie folgt definiert:

$$S_x(0) \;=\; x,$$

$$S_x(n+1) \;=\; g(S_x(n)) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Ein Orbit S heißt *azyklisch*, falls S injektiv ist. Andernfalls heißt S *zyklisch*.
Ein $x \in A$ heißt *azyklisch*, falls S_x azyklisch ist. Andernfalls heißt x *zyklisch*.

Der Buchstabe S erinnert hierbei an „Spur". Der Orbit S_x von x unter g beschreibt die Bahn des Punktes x, wenn wiederholt die Funktion g auf x und seine Bilder angewendet wird.

Ist $g(x) = x$, so ist $S_x(n) = x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $g(x) = y$, $g(y) = x$ und $x \neq y$, so ist $S_x(n) = x$ für gerade n und $S_x(n) = y$ für ungerade n. Das Wort „zyklisch" wird zudem motiviert durch die folgende Übung.

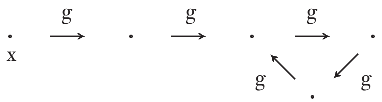
Übung *(Orbitalbahn eines zyklischen Punktes)*

Sei $g : A \to A$ eine Funktion, und sei $x \in A$ zyklisch. Dann gilt:

Es existieren $n_0 \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N} - \{ 0 \}$ mit der Eigenschaft:

Für alle $n, n' \geq n_0$ gilt:

$$S_x(n) \;=\; S_x(n') \quad \textit{gdw} \quad n \equiv_m n'.$$



Ist g injektiv, so ist $n_0 = 0$ geeignet.

[Zur Erinnerung: $n \equiv_m n'$ *gdw* n und n′ haben den gleichen Rest bei Division durch m.]

Das (eindeutig bestimmte) derartige m heißt dann der *Zyklus* von x, das kleinste derartige n_0 die *Vorlaufzeit* von x.

Eine weitere, etwas informal formulierte Übungsaufgabe für den Leser ist, sich die möglichen Orbit-Typen unter nicht injektiven und unter surjektiven Funktionen $g : A \to A$ zu überlegen. Der „Weg rückwärts" von x zu einem y mit $g(y) = x$ ist für surjektive g immer möglich, aber im Allgemeinen nicht eindeutig. Für Injektionen dagegen kann man weiter den Rückwärtsorbit eines Punktes x definieren (solange entsprechende Urbilder existieren). Für Bijektionen gibt es dann stets einen unendlichen Vorwärts- und Rückwärtsorbit,