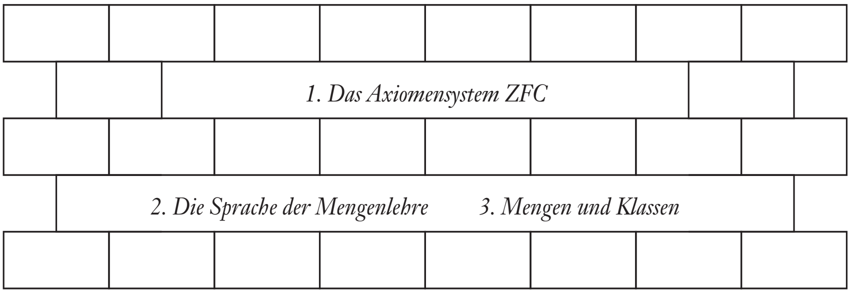
3. Abschnitt

Die Basisaxiome der Mengenlehre



Dieser dritte Abschnitt hat architektonischen, weitgehend parallelen Charakter. Wir entwickeln ein Fundament, auf dem wir die Mengenlehre nach dem Vorbild Cantors errichten können. Zunächst geben wir die Axiome von Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel an, die das Erlaubtsein einer Zusammenfassung von Objekten zu einer Menge regeln. Sie lassen keine schrankenlosen Mengenbildungen zu, wodurch die Paradoxien verschwinden. In einem zweiten, völlig andersartigen Schritt formalisieren wir die Mengenlehre, indem wir eine Kunstsprache konstruieren, in die die Zermelo-Fraenkel-Axiomatik übersetzt werden kann, und in der dann Begriffen wie „Eigenschaft“, „mathematische Aussage“, „Beweis“ eine klare syntaktische Bedeutung zukommt; erst diese formale Sprache macht Resultate über die Grenzen der Zermelo-Fraenkel-Axiomatik möglich. Das Phänomen der zu großen, inkonsistenten Vielheiten spiegelt sich in dieser Kunstsprache in der Unterscheidung zwischen „Mengen“ und „echten Klassen“, der wir uns in einem unspektakulären Schlusskapitel widmen.

1. Das Axiomensystem ZFC

Wir stellen in diesem Abschnitt das heute am häufigsten verwendete Axiomensystem ZFC für die Mengenlehre vor. „ZFC“ ist hierbei eine Abkürzung für „Zermelo-Fraenkel-Axiomatik mit Auswahlaxiom“. Das „C“ stammt hierbei von der englischen Bezeichnung „axiom of choice“ des Auswahlaxioms, das ein ausgezeichnetes Axiom der Zermeloschen Axiomatik darstellt.

Zermelo trug mit seiner Arbeit „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre“, erschienen 1908 in den „Mathematischen Annalen“, den Hauptteil zu diesem System bei. Seine dort vorgestellten sieben Axiome wurden später nur noch ergänzt durch das Ersetzungsschema von Abraham Fraenkel (1922) und das Fundierungsaxiom, das auf Abraham Fraenkel (1922), John von Neumann (1925) und Ernst Zermelo (1930) zurückgeht. Thoralf Skolem (1887 – 1963) hat ebenfalls dem Ersetzungsschema und dem Fundierungsaxiom verwandte Prinzipien betrachtet, und zudem den Weg gewiesen, die axiomatische Mengenlehre durch die Verwendung einer exakten Sprache zu präzisieren (1922). In Briefen von Cantor an Hilbert finden sich axiomatische Ansätze, insbesondere hat Cantor bereits 1898 das Ersetzungsschema formuliert.

Die Abkürzung ZFC ist aus historischer Sicht unglücklich. Zermelos System enthält das Auswahlaxiom bereits als fundamentalen Bestandteil, und die Isolierung dieses Axioms stellt gerade eine der großen Leistungen Zermelos dar. Aus mathematischer Sicht ist die Betonung des „C“ in der Bezeichnung ZFC aber gerechtfertigt, da das Auswahlaxiom eine Sonderstellung unter den Axiomen einnimmt, und seine Verwendung im systematischen Aufbau der Mengenlehre und der restlichen Mathematik eine besondere Beachtung verdient.

Zermelo formulierte seine Axiomatik noch nicht in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe, die heute die „offizielle“ Sprache der Mengenlehre ist. Auch wir werden zuerst die Axiome und einige elementare Folgerungen in der üblichen mathematischen Umgangssprache angeben. Der kritischen Richtung tragen wir dann im zweiten Kapitel vollends Rechnung, wo wir die Prädikatenlogik einführen und insbesondere den Begriff einer Eigenschaft präzisieren. Dort schaffen wir den formalen Rahmen für die Mengenlehre, der für metamathematische Untersuchungen und Resultate wie etwa dem der Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese notwendig ist.

Im zweiten Band werden wir die Mengenlehre auf der Basis der ZFC-Axiome systematisch entwickeln. Die hier erzielten Ergebnisse der Zeit Cantors fügen sich in diesen axiomatischen Aufbau zwanglos ein. Wir können sie und ihre Beweise unverändert übernehmen, lediglich eine etwas andere Organisation des Stoffes ist notwendig, da wir z. B. keine Zahlen mehr als Grundobjekte zur Verfügung haben, sondern sie erst als Mengen konstruieren müssen.

Eine der Hauptaufgaben der mengentheoretischen Axiomatik, unabhängig von metamathematischen Gesichtspunkten, war es, die Theorie des Unendlichen zu retten, und dabei gleichzeitig die aufgetretenen Paradoxien zu eliminieren. Die Paradoxien verschwinden nun in natürlicher Weise in ZFC, da die Axiome keine uferlosen Zusammenfassungen zulassen, wie etwa die Bildung von $\{ x \mid x \text{ ist Menge} \}$ oder allgemein die von $\{ x \mid \mathscr{E}(x) \}$.

Zermelo schreibt in der Einleitung zu seiner Axiomatik von 1908:

Zermelo (1908b): „Die Mengenlehre ist derjenige Zweig der Mathematik, dem die Aufgabe zufällt, die Grundbegriffe der Zahl, der Anordnung und der Funktion in ihrer ursprünglichen Einfachheit mathematisch zu untersuchen und damit die logischen Grundlagen der gesamten Arithmetik und Analysis zu entwickeln; sie bildet somit einen unentbehrlichen Bestandteil der mathematischen Wissenschaft. Nun scheint aber gegenwärtig gerade diese Disziplin in ihrer ganzen Existenz bedroht durch gewisse Widersprüche oder ‚Antinomien', die sich aus ihren scheinbar denknotwendig gegebenen Prinzipien herleiten lassen und bisher noch keine allseitig befriedigende Lösung gefunden haben. Angesichts namentlich der ‚Russellschen Antinomie' von der ‚Menge aller Mengen, welche sich selbst nicht als Element enthalten' scheint es heute nicht mehr zulässig, einem beliebigen logisch definierbaren Begriff eine ‚Menge' oder ‚Klasse' als seinen ‚Umfang' zuzuweisen. Die ursprüngliche Cantorsche Definition einer ‚Menge' als einer ‚Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen' bedarf also jedenfalls einer Einschränkung, ohne dass es doch schon gelungen wäre, sie durch eine andere, ebenso einfache zu ersetzen, welche zu keinen solchen Bedenken mehr Anlaß gäbe. Unter diesen Umständen bleibt gegenwärtig nichts anderes übrig, als den umgekehrten Weg einzuschlagen und, ausgehend von der historisch bestehenden ‚Mengenlehre', die Prinzipien aufzusuchen, welche zur Begründung dieser mathematischen Disziplin erforderlich sind. Diese Aufgabe muss in der Weise gelöst werden, dass man die Prinzipien einmal eng genug einschränkt, um alle Widersprüche auszuschließen, gleichzeitig aber auch weit genug ausdehnt, um alles Wertvolle dieser Lehre beizubehalten.

In der hier vorliegenden Arbeit gedenke ich nun zu zeigen, wie sich die gesamte von G. Cantor und R. Dedekind geschaffene Theorie auf einige wenige Definitionen und auf sieben anscheinend voneinander unabhängige ‚Prinzipien' oder ‚Axiome' zurückführen lässt. Die weitere, mehr philosophische Frage nach dem Ursprung und dem Gültigkeitsbereiche dieser Prinzipien soll hier noch unerörtert bleiben. Selbst die gewiß sehr wesentliche ‚Widerspruchslosigkeit' meiner Axiome habe ich noch nicht streng beweisen können, sondern mich auf den gelegentlichen Hinweis beschränken müssen, dass die bisher bekannten ‚Antinomien' sämtlich verschwinden, wenn man die hier vorgeschlagenen Prinzipien zugrunde legt. Für spätere Untersuchungen, welche sich mit solchen tiefer liegenden Problemen beschäftigen, möchte ich hiermit wenigstens eine nützliche Vorarbeit liefern.

Der nachstehende Artikel enthält die Axiome und ihre nächsten Folgerungen … “

Das Problem der Widerspruchsfreiheit ist systemimmanent und nicht behebbar. Nach dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz kann die Widerspruchsfreiheit von ZFC nicht innerhalb von ZFC bewiesen werden (es sei denn, ZFC ist widerspruchsvoll, denn dann ist alles beweisbar). Aus der Universalität von ZFC – der Tatsache, dass jedes mathematische Argument in ZFC ausgeführt werden kann – folgt, dass wir den Zusatz „innerhalb von ZFC" streichen können. Wir erhalten dann: Die Widerspruchsfreiheit von ZFC ist nicht beweisbar (es sei denn, ZFC ist widerspruchsvoll). Dass bei der Untersuchung einer reichhaltigen Axiomatik keine Widersprüche auftreten und Widersprüche anderer Systeme verschwinden, ist streng genommen alles, was wir zur Widerspruchsfreiheit einer solchen Axiomatik sagen können. Aus humanistischer Sicht spricht aber sicher ein kohärentes und ästhetisches Gesamtbild einer mathematischen Theorie für ihre Widerspruchsfreiheit, und in dieser Hinsicht sind ZFC und die modernen Erweiterungen von ZFC sicherlich widerspruchsfrei.

Die Bedeutung von „x existiert"

Eine Welt für die Mengenlehre, ein Modell, in welchem die Axiome der Mengenlehre gelten, nennt Zermelo einen Bereich. Ein Bereich besteht aus Dingen. Die Dinge eines Zermeloschen Bereiches zerfallen in Mengen und Urelemente (Grundobjekte). Der intendierte, durch die Axiome zu beschreibende Bereich ist das platonische Mengenuniversum, aber man wird bestenfalls hoffen können, dass die Axiome für genau einen Bereich zutreffen werden. Auf diesen Punkt der verschiedenen Modelle für die Mengenlehre kommen wir im zweiten Band ausführlich zurück.

Zermelo (1908b):

„§ 1 Grundlegende Definitionen und Axiome

1. Die Mengenlehre hat zu tun mit einem ‚*Bereich*' $\mathfrak{B}$ von Objekten, die wir einfach als ‚*Dinge*' bezeichnen wollen, unter denen die ‚Mengen' einen Teil bilden. Sollen zwei Symbole a und b dasselbe Ding bezeichnen, so schreiben wir a = b, im entgegengesetzten Falle a ≠ b. Von einem Dinge a sagen wir, es ‚existiere', wenn es dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört …

2. Zwischen den Dingen des Bereiches bestehen gewisse ‚Grundbeziehungen' der Form a ε b. Gilt für zwei Dinge a, b die Beziehung a ε b, so sagen wir, ‚a sei *Element* der Menge b' oder ‚b enthalte a als Element' oder ‚besitze das Element a'. Ein Ding b, welches ein anderes a als Element enthält, kann immer als eine *Menge* bezeichnet werden, aber auch nur dann – mit einer einzigen Ausnahme (Axiom II) [die Ausnahme ist die leere Menge].

3. … [Teilmengen und disjunkte Mengen]

4. Eine Frage oder Aussage $\mathfrak{E}$, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt ‚*definit*'. Ebenso wird auch eine Klassenaussage $\mathfrak{E}(x)$, in welcher der variable Term x alle Individuen einer Klasse $\mathfrak{K}$ durchlaufen kann, als ‚definit' bezeichnet, wenn sie für *jedes einzelne* Individuum x der Klasse $\mathfrak{K}$ definit ist. So ist die Frage, ob a ε b oder nicht ist, immer definit, ebenso die Frage, ob $M \subseteq N$ oder nicht.

Über die Grundbeziehungen unseres Bereiches $\mathfrak{B}$ gelten nun die folgenden ‚*Axiome*' oder ‚*Postulate*' … "

Gemeint ist mit „definiter Aussage“ eine „mathematische Aussage über Mengen“. Eine präzise Definition geben wir erst im nächsten Kapitel, für jetzt begnügen wir uns, wie Zermelo in seiner Arbeit, mit einem hohen, aber nicht maximalen Grad an Exaktheit.

Der Zermelosche Begriff des Bereiches hat – wie der Begriff *definit* – Kritik hervorgerufen. Er ist aber einfach eine andere Bezeichnung für das, was wir bisher Mengenuniversum nannten – bei einem gleichzeitigen Verzicht, von *einem* Mengenuniversum schlechthin zu reden. Bezweifelt man, dass eine *Existenzaussage* über Mengen (oder mathematische Objekte) irgendetwas mit der *Existenz* eines Objektes zu tun hat, so wird man diese Kritik sicherlich teilen, und wahrscheinlich einen formalistischen Standpunkt vertreten. Für diesen Standpunkt, auf den wir im zweiten Kapitel noch genauer zurückkommen, ist eine Existenzaussage einfach eine Zeichenkette, und alles Weitere ist eine mehr oder weniger fruchtbare Zutat der menschlichen Phantasie.

Für den Platoniker dagegen gibt es einen ausgezeichneten Bereich, über den die Axiome reden, nämlich die Welt aller Mengen, das mengentheoretische Universum, das für sich und unabhängig von uns existiert – ganz so, wie die natürlichen Zahlen für viele Mathematiker absolut existieren, wenn auch jeder eine etwas andere Vorstellung von ihnen haben mag. Die Axiome der Mengenlehre konstatieren einfach einige richtige Aussagen über das mengentheoretische Universum. Dass sie auch noch innerhalb anderer Modelle gelten können, innerhalb von Teilbereichen des Universums, spiegelt lediglich den Reichtum der platonischen Welt aller Mengen wider, und die Begrenztheit eines Axiomensystems, das versucht, diesen Reichtum vollständig zu erfassen.

Zwischen diesen beiden Extremen der arktischen Trostlosigkeit und des süditalienischen Katholizismus gibt es eine Vielzahl von möglichen Positionen, und es gibt wenige an Grundlagenfragen interessierte Mathematiker, die Zeit ihres Lebens auf der Weltkugel der Interpretation immer am gleichen Ort residieren.

Die einzelnen Axiome

Wir besprechen nun die Axiome von Zermelo, Fraenkel und von Neumann. Diese Axiome gelten in einem Bereich aus Objekten und Mengen, einer Welt aus „Dingen“. Wir lassen ab hier – im Gegensatz zur Einführung und zu Zermelo – keine Grundobjekte oder Urelemente mehr zu, die Zahlen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ lassen sich leicht als Mengen einführen (etwa $\mathbb{N}$ als die Menge der endlichen Ordinalzahlen nach von Neumann, $\mathbb{Z}$ als $\langle \mathbb{N} - \{ 0 \}, <^* \rangle + \langle \mathbb{N}, < \rangle$, $\mathbb{Q}$ als irgendeine geeignete Fortsetzung von $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ des Typs η, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ als die Dedekind-Vervollständigung von $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$. Auch die Arithmetik auf den Zahlen ist leicht zu definieren und umständlich zu entwickeln, auf Neudeutsch *easy but tedious*). Da wir auch eine Grundlegung der ganzen Mathematik im Auge haben, ist der Verzicht auf Urelemente nur natürlich. Sie würden die Diskussion nur unnötig verkomplizieren. Je weniger man für eine Grundlegung der Mathematik als gegeben annimmt, desto besser. Wir halten also fest:

Alle Objekte sind Mengen, und die einzigen Grundrelationen zwischen Mengen sind die Gleichheit „a = b“ und die Elementbeziehung „a $\in$ b“.

Auf eine Definition von „Menge“ und „a ist Element von b“ wird bewusst verzichtet. Diese Grundbegriffe werden durch die Axiome lediglich beschrieben.

Fraenkel (1928): „Dieser Aufbau der Mengenlehre verläuft nach der sog. *axiomatischen Methode*, die vom historischen Bestand einer Wissenschaft (hier der Mengenlehre) ausgeht, um durch logische Analyse der darin enthaltenen Begriffe, Methoden und Beweise die zu ihrer Begründung erforderlichen Prinzipien – die *Axiome* – aufzusuchen und aus ihnen die Wissenschaft deduktiv herzuleiten. Gemäß dem Wesen dieser Methode sehen wir ganz davon ab, den Mengenbegriff zu *definieren* oder näher zu zergliedern; vielmehr gehen wir lediglich von gewissen Axiomen aus, in denen der Mengenbegriff wie auch die Relation ‚als Element enthalten sein‘ auftritt und die Existenz gewisser Mengen gefordert wird. Durch die Gesamtheit der Axiome wird so der Begriff der Menge gewissermaßen unausgesprochen festgelegt …

Diese ganz formale, jedes sachlichen Inhalts entkleidete Auffassung, die auf eine Charakterisierung der Begriffe ‚Menge‘ und ‚Element sein‘ durch *Definition* bewußt verzichtet und sich mit einer Festlegung der Beziehungen zwischen den uns interessierenden Begriffen begnügt, wird vielleicht deutlicher durch den … Hinweis, dass jede *mit den Axiomen verträgliche* Interpretation der Begriffe ‚Menge‘ und ‚als Element enthalten sein‘ zulässig und mit jeder anderen solchen Interpretation gleichberechtigt ist … Man kann hiernach naturgemäß niemals entscheiden, was eine Menge ‚an sich‘ ist, ob z. B. ein Pferd eine Menge darstellt; eine inhaltliche Bestimmung der Grundbegriffe entspricht eben gar nicht dem Wesen der axiomatischen Methode. Vielmehr liegt eine nur implizite, unausgesprochene, überdies gegenseitig verkettete Definition der Begriffe ‚Menge‘ und ‚Elementsein‘ mittels der Gesamtheit der in den Axiomen auftretenden Aussagen vor.

Dieser Sachverhalt kann cum grano salis auch durch Vergleich mit anderen Wissenschaften, z. B. der Physik, verdeutlicht werden. Begriffe wie der der Wärme oder der Elektrizität, auch etwa der des Äthers, sind in der Naturbetrachtung zunächst implizit gegeben durch ihre Wirkungen und Verknüpfungen bei den experimentell feststellbaren Tatsachen; das Wesen dieser physikalischen Begriffe wird anschaulicher (und auch unabhängiger von dem Wechsel der wissenschaftlichen Theorien) durch die Beschreibung charakteristischer Wirkungen gekennzeichnet als durch eine rein begriffliche Definition dessen, was beim augenblicklichen Stand der Forschung unter dem ‚Wesen‘ der Wärme, der Elektrizität, des Äthers verstanden wird.“

Explizit halten wir fest, dass wir auch die vollständige Induktion und die rekursive Definition über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ – ein Teil des Bereiches – nicht als Beweisprinzip betrachten, sondern entsprechende Induktions- und Rekursionssätze beweisen müssen – und können. Dies geschieht im Prinzip ganz so wie in 2.7. Will man die axiomatische Theorie ähnlich aufziehen wie dort die nichtaxiomatische Mengenlehre, so ist es günstig, etwa für einen Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein, vor einer allgemeinen Ordinalzahl-Induktion und -Rekursion die Induktion und Rekursion über $\mathbb{N}$ zu beweisen, was leicht geschehen kann, sobald man $\mathbb{N}$ selbst definiert hat.

Das Extensionalitätsaxiom

Das erste Axiom ist das bekannte Gleichheitsprinzip:

> **(EXT) Extensionalitätsaxiom**
>
> *Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.*

Das Axiom drückt aus, dass eine Menge vollständig durch ihre Elemente bestimmt ist. Das Denken der Mengenlehre ist durchweg extensional. Ein Begriff wird mit seinem Umfang identifiziert (vgl. die extensionale Definition einer Funktion als Menge von geordneten Paaren).

Wir definieren die Teilmengenrelation $a \subseteq b$ wie früher und erhalten aus dem Extensionalitätsaxiom:

Für alle x, y gilt $x = y$ genau dann, wenn $x \subseteq y$ und $y \subseteq x$.

Zermelo (1908b):

„**Axiom I.** Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element von N und umgekehrt … so ist immer M = N. Oder kürzer: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.

(Axiom der Bestimmtheit.)“

Drei einfache Existenzaxiome

Die weiteren Axiome sind nun bis auf das Fundierungsaxiom Existenzaxiome. Sie behaupten die Existenz bestimmter Mengen, wobei in den meisten Fällen Mengen mit Hilfe anderer Mengen gebildet werden. Die drei einfachsten Existenzaxiome betreffen die Existenz der Elementarmengen $\{ a_1, \dots, a_n \}$ und der Vereinigungsmenge.

> **(LM) Existenz der leeren Menge**
>
> *Es existiert eine Menge, welche keine Elemente hat.*

Wir bezeichnen diese Menge wieder mit $\emptyset$ oder $\{ \ \}$. Nach dem Extensionalitätsaxiom ist die leere Menge eindeutig bestimmt: Es gibt genau eine Menge, die kein Element enthält.

(PA) Paarmengenaxiom

Zu je zwei Mengen x, y existiert eine Menge z, die genau x und y als Elemente hat.

Wir schreiben $\{ x, y \}$ für die Paarmenge von x und y.

Die Mengen x und y müssen nicht verschieden sein, und es folgt für eine Menge x die Existenz von $\{ x, x \} = \{ x \}$, also die Existenz der Einermenge von x. Das geordnete Paar (x, y) ist wieder definiert durch

$$(x, y) \;=\; \{ \{ x \}, \{ x, y \} \}.$$

Es gilt $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ *gdw* $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$. Weiter ist z. B. $(x, x) = \{ \{ x \} \}$.

Relationen und Funktionen sowie Begriffe und Schreibweisen in diesem Umfeld sind wie im ersten Abschnitt definiert.

Zermelo (1908b):

„**Axiom II.** Es gibt eine (uneigentliche) Menge, die ‚*Nullmenge*' 0, welche gar keine Elemente enthält. Ist a irgendein Ding des Bereiches, so existiert eine Menge { a }, welche a und nur a als Element enthält; sind a, b zwei Dinge des Bereiches, so existiert immer eine Menge { a, b }, welche sowohl *a* als [auch] b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.

(Axiom der Elementarmengen.)"

(VER) Vereinigungsmengenaxiom

Zu jeder Menge x existiert eine Menge y,
deren Elemente genau die Elemente der Elemente von x sind.

Diese nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmte Vereinigungsmenge y von x bezeichnen wir mit $\bigcup x$. Es gilt dann für alle y:

$y \in \bigcup x$ *gdw* „es existiert ein $z \in x$ mit $y \in z$".

Ziehen wir das Paarmengenaxiom mit heran, so folgt, dass auch die Vereinigung von zwei Mengen existiert. Wir definieren hierzu für x und y:

$$x \cup y \;=\; \bigcup \{ x, y \}.$$

Es gilt dann $z \in x \cup y$ *gdw* $z \in x$ oder $z \in y$.

Das Paarmengenaxiom garantiert uns die Existenz von $\{ x, y \}$ für alle x, y. Für die Existenz der Dreiermenge $\{ x, y, z \}$ usw. braucht man das Vereinigungsmengenaxiom. Wir setzen

$$\{ x, y, z \} \;=\; \bigcup \{ \{ x, y \}, \{ z \} \},$$

wobei wir hier dreimal das Paarmengenaxiom und einmal das Vereinigungsmengenaxiom bemühen. Allgemein definieren wir:

$$\{x_1, x_2, x_3\} \quad = \quad \bigcup\,\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\},$$
$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad = \quad \bigcup\,\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4\}\},$$
$$\ldots$$
$$\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \quad = \quad \bigcup\,\{\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}, \{x_{n+1}\}\}.$$

Wiederholte Anwendung des Paarmengen- und des Vereinigungsmengenaxioms zeigt dann für ein beliebiges n:

(+) für jede Liste $x_1, \ldots, x_n$ von Mengen existiert eine Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$, die genau $x_1, \ldots, x_n$ als Elemente enthält.

Nach (EXT) ist sie eindeutig bestimmt.

Die „metamathematischen“ natürlichen Zahlen 1, 2, …, n, n + 1 sind hier keine Objekte des Bereichs (Mengen), sondern lediglich Indikatoren für die Länge der Liste $x_1, \ldots, x_n$. Zur Vermeidung von Verwechslungen mit Elementen des erst zu definierenden $\mathbb{N} = \omega$ des Objektbereichs ist es zuweilen suggestiv, sich die metamathematische Zahlenreihe 1, 2, 3, … als |, ||, |||, usw. vorzustellen. Üblicherweise werden aber die Zeichen 1, 2, 3, … sowohl zur Bezeichnung von Mengen verwendet, als auch zur Bezeichnung von metamathematischen natürlichen Zahlen wie oben bei der Definition von $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Der Leser muss dann entscheiden, auf welcher Ebene man sich befindet, was normalerweise problemlos ist.

Wir lassen auf der „Metaebene“ Induktion und Rekursion nach 1, 2, 3, … zu, und man kann etwa (+) durch Induktion beweisen. Aussagen wie (+) werden in der endlichen Welt, in der wir über Mathematik reden, nie wirklich für alle natürlichen Zahlen der Metaebene gebraucht. Wir haben irgendwann etwa mit Objekten zu tun, die wir mit $x_1, \ldots, x_{10}$ bezeichnen, und zeigen dann durch mehrfache Anwendung von bestimmten Axiomen, dass $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ existiert. Ein andermal mit 17 statt 10, oder mit 1220. Die Pünktchen „…“ wie in der Definition oben sind dann nur Hinweise, wie sich eine Definition für ein beliebiges, konkret gegebenes metamathematisches n, etwa 17, durchzuführen ist. Induktion ist aber eine bequeme Sprechweise in der Metaebene, und wir werden später etwa Aussagen über den Hilbert-Kalkül durch Induktion über die Länge von Beweisen zeigen. Wir brauchen aber nie wirklich einen Satz der Form „für alle n …“, sondern immer nur ein Schema für beliebige, konkrete n.

Später noch einmal mehr zur Metaebene. Der Leser verwende Induktion und Rekursion über metamathematische natürliche Zahlen, wo immer es ihm angemessen erscheint. Oder er verwende Pünktchen „…“, und Sprechweisen wie „n-malige Anwendung“, usw.

Analog sind Tripel, Quadrupel, …, n-Tupel für jede (metamathematische) natürliche Zahl n definiert durch:

$$
\begin{array}{lcl}
(x_1, x_2, x_3) & = & ((x_1, x_2), x_3), \\
(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & ((x_1, x_2, x_3), x_4), \\
 & \dots & \\
(x_1, \dots, x_{n+1}) & = & ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}).
\end{array}
$$

Je zwei n-Tupel sind genau dann gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen.

In ähnlicher Weise setzen wir

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 \cup x_2 \cup x_3 & = & (x_1 \cup x_2) \cup x_3, \\
x_1 \cup x_2 \cup x_3 \cup x_4 & = & (x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cup x_4, \\
 & \dots & \\
x_1 \cup \dots \cup x_{n+1} & = & (x_1 \cup \dots \cup x_n) \cup x_{n+1}.
\end{array}
$$

Damit gilt für alle $x_1, \dots, x_n$, dass

$$\{ x_1, \dots, x_n \} = \{ x_1 \} \cup \{ x_2 \} \cup \dots \cup \{ x_n \}.$$

Zermelo (1908b):

„**Axiom V.** Jeder Menge T entspricht eine Menge $\mathfrak{S}T$ (die ‚*Vereinigungsmenge*' von T), welche alle Elemente der Elemente von T und nur solche als Elemente enthält. (Axiom der Vereinigung.)"

Das Aussonderungsschema

(AUS) Aussonderungsschema

Zu jeder Eigenschaft $\mathscr{E}$ und jeder Menge x gibt es eine Menge y, die genau die Elemente von x enthält, auf die $\mathscr{E}$ zutrifft.

Wir bezeichnen diese Menge y mit $\{ u \in x \mid \mathscr{E}(u) \}$.

Der Name „Schema" bezieht sich auf die frei wählbare Eigenschaft $\mathscr{E}$: Wir haben ein Axiom pro Eigenschaft, und unser Axiomensystem besteht damit aus unendlich vielen Axiomen. Wir werden im zweiten Band zeigen, dass sich ZFC nicht auf endlich viele Axiome reduzieren lässt.

Die Eigenschaft $\mathscr{E}$ darf andere Mengen als Parameter enthalten. Für jedes x können wir z. B. bilden:

$$\{ u \in x \mid u \neq \emptyset \}.$$

Die verwendete Eigenschaft ist hier $\mathscr{E}$ = „$u \neq \emptyset$", mit der Menge $\emptyset$ als Parameter.

Der Unterschied zum vollen Komprehensionsschema ist, dass wir uns bei der

Aufsammlung von Objekten mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ auf die Elemente einer fest vorgegebenen Menge x beziehen: Wir sondern aus x alle Elemente mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ aus, und fassen diese Elemente zu einer neuen Menge zusammen. Die entstehende Menge $\{ u \in x \mid \mathcal{E}(u) \}$ ist immer eine Teilmenge von x, und damit ist das Aussonderungsschema ein „Existenzaxiom nach unten“. Obwohl in dieser Hinsicht das Aussonderungsschema viel schwächer ist als das uferlose Komprehensionsschema, können wir es in der Anwendung ähnlich flexibel einsetzen wie das Komprehensionsschema, da sich zumeist ein Teilbereich x des Mengenuniversums finden lässt, in dem alle gewünschten Objekte u mit der Eigenschaft $\mathcal{E}(u)$ als Elemente vorhanden sind. Ein Beispiel hierfür gibt das kartesische Produkt, das wir nach der Einführung des Potenzmengenaxioms definieren werden.

Das Aussonderungsschema garantiert uns die Existenz der Schnittmenge und der Subtraktion. Wir definieren:

$$x \cap y \;=\; \{ z \in x \mid z \in y \},$$

$$x - y \;=\; \{ z \in x \mid z \notin y \}.$$

Hierbei sind „$z \in y$“ und „$z \notin y$“ die verwendeten Eigenschaften. Die Menge y ist in beiden Fällen Parameter der Aussonderung aus x.

Übung

(i) Definieren Sie $x_1 \cap \ldots \cap x_n$.

(ii) Definieren Sie $\emptyset$ mit Hilfe des Aussonderungsschemas und der Annahme der Existenz irgendeiner Menge.

Sei X eine nichtleere Menge und $x^* \in X$. Wir definieren:

$$\bigcap X \;=\; \{ y \in x^* \mid \text{für alle } x \in X \text{ gilt } y \in x \}.$$

Offenbar ist $\bigcap X$ unabhängig von der Wahl von $x^* \in X$.

Zermelo (1908b):

„**Axiom III.** Ist die Klassenaussage $\mathfrak{E}(x)$ definit für alle Elemente einer Menge M, so besitzt M immer eine Untermenge $M_{\mathfrak{E}}$, welche alle diejenigen Elemente x von M, für welche $\mathfrak{E}(x)$ wahr ist, und nur solche als Elemente enthält.

(Axiom der Aussonderung.)“

Auswertung der Paradoxie von Russell-Zermelo

Bevor wir die weiteren Axiome von ZFC vorstellen, zeigen wir, dass sich die Konstruktion der Russell-Zermelo-Paradoxie nun in einen Satz verwandelt. Das Aussonderungsschema erlaubt uns die Konstruktion von $R = \{ x \mid x \notin x \}$ nicht, und in diesem Sinne existiert die Paradoxie nicht mehr. Die Konstruktion liefert aber das folgende informative Ergebnis über das Mengenuniversum (oder, in der Sprache Zermelos, den zugrunde liegenden Bereich $\mathfrak{B}$):

Satz

Für alle x existiert ein $y \subseteq x$ mit $y \notin x$.

Beweis

Sei x beliebig. Nach dem Aussonderungsschema existiert

$$y = \{ z \in x \mid z \notin z \}.$$

Dann gilt $y \notin x$, denn *andernfalls* hätten wir

$$y \in y \;\; gdw \;\; y \notin y,$$

wie im Paradoxon von Russell-Zermelo. *Widerspruch!*

Diese Überlegung bildet das erste *Theorem* in Zermelos Arbeit. Paradoxien werden, wie schon bei Cantor, zu mathematischen Resultaten.

Korollar

(i) Es gibt kein x mit der Eigenschaft: Für alle y ist $y \in x$.

(ii) Es gibt kein x mit der Eigenschaft: Für alle y mit $y \notin y$ ist $y \in x$.

Beweis

zu (i): Ein solches x würde alle seine Teilmengen als Elemente enthalten, im Widerspruch zum Satz oben.

zu (ii): Für ein solches x erhalten wir durch Aussonderung

$$x^* = \{ z \in x \mid z \notin z \}.$$

Dann gilt nach Annahme über x für alle z: $z \in x^*$ *gdw* $z \notin z$. Für $z = x^*$ erhalten wir wieder

$$x^* \in x^* \;\; gdw \;\; x^* \notin x^*,$$

Widerspruch!

Die Aussage (i) besagt: Das Mengenuniversum selbst ist keine Menge. Die Aussage (ii) besagt: Es gibt viele Mengen x mit $x \notin x$. Denn obwohl wir den Fall $x \in x$ für eine Menge x nach den bisherigen Axiomen nicht ausschließen können, so sind doch die „normalen“ Mengen mit der Eigenschaft $x \notin x$ so zahlreich, dass sie in einer anderen Menge nicht alle enthalten sein können.

Nun aber zurück zu den Axiomen von ZFC.

Das Unendlichkeitsaxiom

(UN) Unendlichkeitsaxiom

Es existiert eine Menge x, die die leere Menge als Element enthält und die mit jedem ihrer Elemente y auch { y } als Element enthält.

Es sind also die Mengen

$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\{\{\emptyset\}\}\},\ \dots$

Elemente von x. Eine kleinste Menge mit dieser Eigenschaft werden wir nach der Einführung des Potenzmengenaxioms besprechen.

Zermelo (1908b):

„**Axiom VII.** Der Bereich enthält mindestens eine Menge Z, welche die Nullmenge als Element enthält und so beschaffen ist, dass jedem ihrer Elemente a ein weiteres Element der Form { a } entspricht, oder [anders formuliert,] welche mit jedem ihrer Elemente a auch die entsprechende Menge { a } als Element enthält.

(Axiom des Unendlichen.)“

Ein in Verbindung mit dem Unendlichkeitsaxiom sehr starkes Existenzaxiom ist das Potenzmengenaxiom.

Das Potenzmengenaxiom

(POT) Potenzmengenaxiom

Zu jeder Menge x existiert eine Menge y, die genau die Teilmengen von x als Elemente besitzt.

Die Potenzmenge von x bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(x)$.

Das Axiom garantiert, wie wir gesehen haben, die reiche Struktur der unendlichen Mengen hinsichtlich ihrer Mächtigkeit.

Das Potenzmengenaxiom kann man als eine zulässige Instanz des vollen Komprehensionsaxioms lesen:

Für jede Menge x existiert die Menge $\{ y \mid \mathcal{E}(y) \}$, wobei $\mathcal{E}(y)$ die Eigenschaft „$y \subseteq x$“ ist.

Übung

Formulieren Sie die „Aufwärtsaxiome“ (LM), (PA), (VER) als Spezialfälle des vollen Komprehensionsschemas. [z. B. $\emptyset = \{ x \mid x \neq x \}$.]

Den oben bewiesenen Satz, dass jede Menge eine Teilmenge besitzt, die nicht Element der Menge ist, können wir nun kurz so formulieren:

Satz

Es gibt kein x mit $\mathcal{P}(x) \subseteq x$.

Damit fällt auch die Mirimanovsche Paradoxie weg.

Das kartesische Produkt

Mit Hilfe des Potenzmengenaxioms und des Aussonderungsschemas können wir nun das kartesische Produkt definieren. Für Mengen A, B würden wir gerne zeigen, dass eine Menge $A \times B$ existiert mit der Eigenschaft: Für alle a, b gilt

$(a, b) \in A \times B$ *gdw* $a \in A$ und $b \in B$.

Die Definition $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$ ist unbeschränkte Komprehension und nicht durch das Aussonderungsschema abgesichert. Wir beobachten aber:

Für $a \in A$, $b \in B$ ist

$(a, b) = \{ \{ a \}, \{ a, b \} \} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Also gilt $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Wir setzen also:

$A \times B = \{ (a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$.

Dann gilt wie gewünscht

$(a, b) \in A \times B$ *gdw* $a \in A$ und $b \in B$.

Weiter setzen wir:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times A_3 \quad &= \quad (A_1 \times A_2) \times A_3, \\ A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \quad &= \quad (A_1 \times A_2 \times A_3) \times A_4, \\ &\ldots \\ A_1 \times \ldots \times A_{n+1} \quad &= \quad (A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}. \end{aligned}$$

Für alle $A_1, \ldots, A_n$ und alle x gilt dann:

$x \in A_1 \times \ldots \times A_n$ *gdw* $x = (a_1, \ldots, a_n)$ für gewisse $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$.

Ist $A_1 = \ldots = A_n$, so schreiben wir A^n für $A_1 \times \ldots \times A_n$. A^n ist die Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus A.

Zermelo (1908b):
„**Axiom IV.** Jeder Menge T entspricht eine zweite Menge $\mathfrak{U}T$ (die ‚*Potenzmenge*' *von T)*, welche alle Untermengen von T und nur solche als Elemente enthält.
(Axiom der Potenzmenge.)"

Zermelos Zahlreihe Z_0

Eine Menge u heißt *Zermelo-induktiv* oder kurz *Z-induktiv*, falls gilt:

„$\emptyset \in$ u und mit jedem $x \in u$ ist auch $\{ x \} \in u$".

Eine Z-induktive Menge z* existiert nach dem Unendlichkeitsaxiom. Wir setzen:

$$Z_0 = \bigcap \{ u \in \mathcal{P}(z^*) \mid u \text{ ist Z-induktiv} \}.$$

Diese Menge existiert nach dem Potenzmengenaxiom und dem Aussonderungsschema. Z_0 besteht intuitiv aus genau den Mengen $\emptyset$, $\{ \emptyset \}$, $\{ \{ \emptyset \} \}$, …

Man zeigt leicht: Z_0 ist Z-induktiv. Weiter ist die Definition von Z_0 unabhängig von der speziellen Wahl der Z-induktiven Menge z* (!).

Z_0 kann man als Menge der natürlichen Zahlen auffassen:

$0 = \emptyset,\ 1 = \{ \emptyset \},\ 2 = \{ \{ \emptyset \} \},\ 3 = \{ \{ \{ \emptyset \} \} \},\ \dots,$ also

$0 = \emptyset,\ 1 = \{ 0 \},\ 2 = \{ 1 \},\ 3 = \{ 2 \}, \dots$

Zermelo (1908b): „… Die Menge Z_0 enthält die Elemente 0, $\{ 0 \}$, $\{ \{ 0 \} \}$ usw. und möge als ‚*Zahlreihe*' bezeichnet werden, weil ihre Elemente die Stelle der Zahlzeichen vertreten können. Sie bildet das einfachste Beispiel einer ‚abzählbar unendlichen' Menge … "

Wir haben noch keine Induktion entlang einer Wohlordnung zur Verfügung, wenn wir über Z_0 etwas beweisen wollen. Wir müssen mit der Schnittdefinition auskommen. Diese lässt sich aber in einer induktiven Form notieren, denn direkt aus der Definition von Z_0 erhalten wir: Ist u eine Z-induktive Teilmenge von Z_0, so ist $u = Z_0$. Dies liefert folgende Form der „Peano-Induktion" für Z_0:

„Sei $u \subseteq Z_0$ mit (1) $\emptyset \in u$, (2) für alle $x \in u$ ist $\{ x \} \in u$. Dann ist $u = Z_0$."

Übung

(i) Es gilt $x \neq \{ x \}$ für alle $x \in Z_0$.

[Sei $u = \{ x \in Z_0 \mid x \neq \{ x \} \}$. Es genügt zu zeigen, dass u Z-induktiv ist. Offenbar gilt $\emptyset \in u$. Sei also $x \in u$ beliebig. Es gilt $x \neq \{ x \}$, da $x \in u$. Dann ist aber auch $\{ x \} \neq \{ \{ x \} \}$ nach dem Extensionalitätsaxiom und der Definition der Einermenge. Also ist $\{ x \} \in u$.]

(ii) Jedes $x \in Z_0$, $x \neq \emptyset$, hat genau ein Element.

(iii) Z_0 ist transitiv: Ist $x \in Z_0$, so ist $x \subseteq Z_0$.

Weiter kann man eine <-Relation auf Z_0 definieren durch:

$$< \; = \; \bigcap \{ R \subseteq Z_0 \times Z_0 \mid R \text{ ist transitiv und für alle } x \in Z_0 \text{ ist } (x, \{ x \}) \in R \}.$$

Eine anspruchsvollere Übung ist:

Übung

$\langle Z_0, < \rangle$ ist eine Wohlordnung.

Hieraus gewinnt man dann Induktion und Rekursion über $\langle Z_0, < \rangle$, wobei über Z_0 rekursiv definierte Operationen $\mathcal{F} : Z_0 \to V$ im Allgemeinen selbst keine Mengen mehr sind (kein Axiom garantiert uns, dass die Vereinigung von partiellen Rekursionsfunktionen „bis x" für $x \in Z_0$ eine Menge ist, vgl. Beweis des Rekursionssatzes und die Diskussion zum Ersetzungsschema unten).

Übung

Es gilt $|Z_0| \leq |M|$ für jede Dedekind-unendliche Menge M.

Z_0 dient im Rahmen der ursprünglichen Axiome von Zermelo als Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Aus der – weit nach 1908 gefundenen – Definition der Ordinalzahlen nach von Neumann und Zermelo (siehe 2.6) ergibt sich eine etwas andere Definition der natürlichen Zahlen, die man ja als Anfangsstück der Ordinalzahlen definieren möchte. Bei der Interpretation mathematischer Objekte innerhalb der Mengenlehre gibt es keine eindeutigen Lösungen. Brauchbarkeit und Natürlichkeit sind die entscheidenden Gesichtspunkte. Drängt sich eine Definition aufgrund bestimmter Überlegungen geradezu von selbst auf, so spricht man von einer „kanonischen Definition". Und die Definition der Ordinalzahlen nach von Neumann und Zermelo ist, wie wir gesehen haben, in diesem Sinne kanonisch. Die natürlichen Zahlen sind hier:

$$0 = \emptyset, \; 1 = \{ 0 \}, \; 2 = \{ 0, 1 \}, \; 3 = \{ 0, 1, 2 \}, \; 4 = \{ 0, 1, 2, 3 \}, \ldots$$

$$n + 1 = \{ 1, \ldots, n \} = n \cup \{ n \},$$

Diese Definition betont den Ordnungs- und den Mächtigkeitsaspekt der natürlichen Zahlen gleichermaßen. Jedes n hat genau n Elemente und die $\in$-Relation ordnet die natürlichen Zahlen linear. Wählt man als Unendlichkeitsaxiom:

(UN2) Unendlichkeitsaxiom II

Es existiert eine Menge x, die die leere Menge als Element enthält und die mit jedem ihrer Elemente y auch $y \cup \{ y \}$ als Element enthält.

– so kann man die Ordinalzahlen 0, 1, 2, … nach von Neumann und Zermelo analog definieren wie oben Z_0 definiert wurde. Man setzt:

$$\omega = \bigcap \{ U \in \mathcal{P}(x) \mid \emptyset \in U \text{ und für alle } y \in U \text{ ist } y \cup \{ y \} \in U \},$$

wobei x beliebig ist wie in (UN 2). Dieses ω ist dann die erste Limesordinalzahl. Man beweist, nur die Schnittdefinition verwendend, die elementaren Eigenschaften von ω, etwa:

(i) ω ist transitiv,

(ii) $n \notin n$ für alle $n \in \omega$,

(iii) $n \neq n + 1 = n \cup \{ n \}$ für alle $n \in \omega$, usw.

Weiter zeigt man, dass jede nichtleere Teilmenge von ω ein kleinstes (im Sinne der $\in$-Relation) Element hat, d.h. $\langle \omega, < \rangle = \langle \omega, \in | \omega \rangle$ ist eine Wohlordnung, und dies liefert Induktion und Rekursion über ω. ω ist die Menge der „natürlichen Zahlen" innerhalb der Mengenlehre, mit der Ordinalzahldefinition nach von Neumann und Zermelo.

Was ist nun der Unterschied zwischen (UN) und (UN2)? Warum hat Zermelo Z_0 betrachtet? Es zeigt sich: (UN) und (UN2) sind äquivalent, wenn man das Ersetzungsschema zu Zermelos Axiomatik mit hinzunimmt, das wir gleich besprechen werden. In der ursprünglichen – auf den Wohlordnungssatz zugeschnittenen – Zermelo-Axiomatik kann man dagegen die Existenz von ω wie oben definiert nicht zeigen. Generell gilt, dass in einer Axiomatik ohne Ersetzungsschema nur wenige Neumann-Zermelo-Ordinalzahlen existieren, egal, welche Form man dem Unendlichkeitsaxiom gibt. Unabhängig von einem notorischen Mangel an Neumann-Zermelo-Ordinalzahlen gilt ohne Ersetzungsschema der Rekursionssatz nicht einmal für beliebige abzählbare Wohlordnungen; wir bleiben im Limesschritt hängen, und Rekursionen der Länge ω liefern i. A. schon echte Klassen. Diesem für die Mengenlehre also sehr wichtigen Axiom wenden wir uns nun zu.

Die eben aufgestellten Behauptungen über die Notwendigkeit des Ersetzungsschemas lassen sich nur durch Modellkonstruktionen beweisen, was außerhalb dieses Textes liegt. Der Leser kann aber z.B. den Beweis des Rekursionssatzes noch einmal konsultieren, nachdem er das Ersetzungsschema kennengelernt hat, um zu sehen, wo es im Beweis eingeht.

Das Ersetzungsschema

Bis auf das Auswahlaxiom, das wir am Ende der Liste besprechen, haben wir nun alle Axiome von Zermelo aus dem Jahre 1908 eingeführt. Wir kommen nun zur ersten Ergänzung des Systems von Zermelo durch das Ersetzungsschema von Abraham Fraenkel und Thoralf Skolem. Hierzu brauchen wir den Begriff einer „funktionalen Eigenschaft" oder einer „Operation auf V":

Ist $\mathscr{E}(x, y)$ eine Eigenschaft in zwei Variablen x und y, so heißt $\mathscr{E}(x, y)$ *funktional*, falls es für jedes x genau ein y gibt mit $\mathscr{E}(x, y)$.

$\mathscr{E}(x, y)$ ist also intuitiv eine „Funktion" auf dem Mengenuniversum: Jedem x wird ein eindeutiges y zugeordnet, nämlich dasjenige y, für welches $\mathscr{E}(x, y)$ erfüllt ist.

Beispiele

$\mathscr{E}_1(x, y)$ = „y ist identisch mit x“ = „$y = x$“,

$\mathscr{E}_2(x, y)$ = „y ist die Einermenge von x“ = „$y = \{ x \}$“,

$\mathscr{E}_3(x, y)$ = „y ist die Potenzmenge von x“ = „$y = \mathcal{P}(x)$“.

Übung

Ist $\mathscr{E}(x, y)$ eine funktionale Eigenschaft, so existiert die Zusammenfassung $\{ (x, y) \mid \mathscr{E}(x, y) \}$ nicht, d. h. es gibt keine Menge z von geordneten Paaren mit: Für alle x, y gilt: $(x, y) \in z$ gdw $\mathscr{E}(x, y)$.

[z wäre eine auf dem ganzen Mengenuniversum definierte Funktion, also keine Menge; denn andernfalls wäre nach dem Vereinigungsaxiom $\{ x \mid x = x \} = \bigcup \bigcup z$ eine Menge.]

Wir können nun das Ersetzungsschema formulieren.

(ERS) Ersetzungsschema

Zu jeder funktionalen Eigenschaft $\mathscr{E}$ und jeder Menge M existiert eine Menge N, die genau diejenigen y als Elemente enthält, für welche ein $x \in M$ existiert mit $\mathscr{E}(x, y)$.

Kurz und anschaulich:

„*Das Bild einer Menge unter einer funktionalen Eigenschaft ist eine Menge.*“

Vorstellung ist: Wir haben eine Menge M und eine universelle Zuordnung $\mathscr{E}(x, y)$. Wir bilden nun eine Menge N, indem wir jedes Element x von M durch das eindeutige y mit $\mathscr{E}(x, y)$ „ersetzen“.

Die Anwendung des Ersetzungsschemas erzeugt intuitiv keine zu großen und damit pathologischen Objekte, da wir die Elemente einer bereits vorhandenen Menge durch andere austauschen. Die Mächtigkeit der entstehenden Menge ist also immer kleinergleich der Mächtigkeit der Ausgangsmenge.

Die Stärke des Ersetzungsschemas liegt in der Verwendung von funktionalen Eigenschaften. Ist F eine Funktion auf einer Menge M, so brauchen wir für die Existenz des Bildes $N = F''M$ von M unter F kein neues Axiom:

Übung

Sei F eine Funktion mit $M \subseteq \mathrm{dom}(F)$. Dann existiert $N = F''M$.

[Mit Vereinigungsaxiom und Aussonderungsschema.]

Man kann das Ersetzungsschema auch als eine liberalere Form des Aussonderungsschemas betrachten:

Übung

Zeigen Sie das Aussonderungsschema mit Hilfe des Ersetzungsschemas (und der übrigen Axiome).

Wir könnten das Aussonderungsschema also aus ZFC streichen, ohne die Stärke des Axiomensystems zu vermindern. Wegen seiner Natürlichkeit und Nützlichkeit im Aufbau der Theorie hat es aber einen sicheren Platz innerhalb der Axiome.

Fraenkel (1922): „Wenn man die Cantorsche Mengenlehre, unter Ausscheidung der Antinomien und unter Verzicht auf die ihnen Raum gebende Cantorsche Mengendefinition, auf mathematisch befriedigende Grundlagen stellen will, so kommt vorläufig nur die von Herrn Zermelo gegebene Begründung in Frage. Einige das Grundgerüst dieser Begründung betreffende und z. T. es modifizierende Bemerkungen bilden den Inhalt der folgenden Zeilen … Die überaus scharfsinnigen Untersuchungen Zermelos sollen hierdurch nicht umgestoßen, sondern nur vervollständigt und befestigt werden …

I. Die sieben Zermeloschen Axiome reichen nicht aus zur Begründung der Mengenlehre.

Zum Nachweis dieser Behauptung diene etwa das folgende einfache Beispiel: Es sei Z_0 die [in Zermelo 1908b] definierte und als existierend nachgewiesene Menge (Zahlenreihe). Die Potenzmenge $\mathfrak{U}Z_0$ (Menge aller Untermengen von Z_0) werde mit Z_1, $\mathfrak{U}Z_1$ mit Z_2 bezeichnet usw. Dann gestatten die Axiome, wie deren Durchmusterung leicht zeigt, nicht die Bildung der Menge $\{ Z_0, Z_1, \dots \}$, also auch nicht die Bildung der Vereinigungsmenge. Es lässt sich daher, wenn man etwa dem Kontinuum eine Mächtigkeit $< \aleph_\omega$ zuschreibt, auf Grund der Axiome z. B. die Existenz von Mengen mit Mächtigkeit $\geq \aleph_\omega$ nicht beweisen.

Diese bisher nicht bemerkte Lücke der Zermeloschen Begründung ist durch Hinzufügung eines neuen Axioms oder Erweiterung eines vorhandenen auszufüllen …

Ersetzungsaxiom. Ist M eine Menge und wird jedes Element von M durch ‚ein Ding des Bereiches $\mathfrak{B}$' ersetzt, so geht M wiederum in eine Menge über.

Für das oben angeführte Beispiel hat man, um die Existenz der Menge $\{ Z_0, Z_1, \dots \}$ zu zeigen, auf Grund des soeben formulierten Axioms nur das Element 0 von Z_0 durch Z_0, das Element $\{ 0 \}$ durch Z_1 zu ersetzen usw. Man kann weiter auf die Vereinigungsmenge der so entstehenden Menge das Axiom in analoger Weise anwenden und erlangt, derart weiterschreitend, ersichtlich die erforderliche Freiheit in der Bildung von Mengen.“

Dass man tatsächlich das Ersetzungsschema nicht aus den anderen Axiomen beweisen kann, ist durch eine „Durchmusterung“ der Zermelo-Axiome nur plausibel gemacht. Der strenge Beweis dieser Behauptung fällt wie die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese in den Bereich der Metamathematik: Man gibt ein Modell der Zermelo-Axiome an, in dem das Ersetzungsschema falsch ist.

Das Ersetzungsschema garantiert im Aufbau der axiomatischen Mengenlehre die Existenz vieler Neumann-Zermelo-Ordinalzahlen, kurz: Ordinalzahlen, da die Cantor-Hausdorff-Definition hier zu ungenau ist. Weiter wird es ganz wesentlich gebraucht im Beweis des Rekursionssatzes für Wohlordnungen und allgemeiner im Beweis des Rekursionssatzes für alle Ordinalzahlen.

Wir können folglich die V_α-Hierarchie wie in 2.7 definieren. Für den Beweis, dass es für jede Menge x eine Ordinalzahl α gibt mit $x \in V_\alpha$, wird ein weiteres Axiom benötigt.

Das Fundierungsaxiom

Wir kommen nun zum Fundierungsaxiom, das kein Existenzaxiom ist, sondern dem Extensionalitätsaxiom verwandt ist: Es beschreibt die Elementrelation. Im Gegensatz zu den Existenzaxiomen sorgt es für eine Beschränkung des Mengenuniversums.

(FUN) Fundierungsaxiom

Jede nichtleere Menge x hat ein Element y, das mit x kein Element gemeinsam hat.

Also: Für alle $x \neq \emptyset$ existiert ein $y \in x$ mit der Eigenschaft $y \cap x = \emptyset$.

Das Axiom drückt aus, dass Mengen irgendwie aus „bereits vorhandenen“ anderen Mengen konstruiert werden. Das Axiom schließt Mengenzyklen aus, die die Ausgangsmenge bei einem $\in$-Abstieg irgendwann reproduzieren:

Übung

(i) Es gibt kein x mit $x = \{ x \}$.

(ii) Es gibt kein x mit $x \in x$.

(iii) Es gibt keine x, y mit $x \in y \in x$.

(iv) Es gibt keine $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit der Eigenschaft:
$x_0 \in x_n \in \ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$.

Allgemeiner kann es keine unendlichen absteigenden $\in$-Ketten geben, d. h. es gibt keine Funktion f mit $\mathrm{dom}(f) = Z_0$ (oder $\mathrm{dom}(f) = \omega$, wenn man mag) und $f(\{ n \}) \in f(n)$ für alle n, d. h.

$$f(\emptyset) \ni f(\{\emptyset\}) \ni f(\{\{\emptyset\}\}) \ni \ldots.$$

Eine solche Kette kann nicht existieren, denn $x = \{ f(n) \mid n \in Z_0 \}$ wäre dann eine Menge ohne $\in$-minimales Element.

Das Axiom sorgt für ein scharfes Bild des Mengenuniversums V : V ist aus der leeren Menge stufenweise aufgebaut. Wie in 2.7 zeigt man, dass jedes x von einer V_α-Stufe eingefangen wird. Wird das Fundierungsaxiom außerhalb der Mengenlehre auch selten gebraucht, so ist es innerhalb der abstrakten Mengenlehre um so bedeutender. Das Universum kann entlang der Ordinalzahlen durch iterierte Anwendung der Potenzmengen- und Vereinigungsmengenoperationen vollständig durchforstet werden.

Es ist interessant, dass die beiden von Zermelo 1908 „vergessenen“ Axiome im wesentlichen nur in der Mengenlehre benötigt werden, während die Mathematik weitestgehend ohne sie auskommt. Der Grund ist, dass dort nur zwei oder dreimal überhaupt die Potenzmengenoperation verwendet wird, und nicht in unendlicher Iteration und darüber hinaus, was nur durch das Ersetzungsschema garantiert werden würde. Auch die ω-Rekursion ist im Rahmen von beschränkt vielen Potenzmengenoperationen problemlos beweisbar. Mit Fraenkels Notation: Ein Großteil der Mathematik verläuft in Z_3 oder Z_4, und „fast alles“ etwa in Z_8. In jedem Z_n gilt das Fundierungsaxiom, sodass nichtfundierte Mengen gar nicht erst auftreten. (Allgemeiner gilt es in der ganzen V_α-Hierarchie.) Zermelos System erlaubt einen Beweis des Wohlordnungssatzes und des Satzes von Zermelo-Zorn, der in der Mathematik verwendet wird. Hierzu wird das Auswahlaxiom gebraucht, das wir unten besprechen werden.

Fraenkel (1922): „Hat sich [im Hinblick auf das Ersetzungsschema] der Zermelosche Mengenbegriff als zu eng für die Cantorsche Mengenlehre erwiesen, so ist er in anderer Beziehung weiter, als es die Bedürfnisse der Mathematik zu erfordern scheinen. Zunächst nämlich können unter den ‚Dingen‘ des ‚Bereiches $\mathfrak{B}$‘, aus denen auf Grund der Axiome die Mengen ihre Existenz herleiten, sich auch solche nichtmathematischer und überhaupt nichtbegrifflicher Herkunft befinden. Ferner lässt das Axiomensystem Raum z. B. für die von Herrn Mirimanoff als ‚ensembles extraordinaires‘ bezeichneten Mengen M von der Art, dass, wenn $M_1 \varepsilon M$ und wenn k eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, M_k stets ein Element M_{k+1} enthält. Solche Mengen können zwar nicht auf Grund der Axiome aus den ‚unzerlegbaren‘ (d. h. keine Menge darstellenden) Dingen von $\mathfrak{B}$ aufgebaut werden, sie *können* aber in $\mathfrak{B}$ vorkommen …

… so kann hier den angegebenen Übelständen durch ein als neuntes und letztes Axiom aufzustellendes ‚*Beschränktheitsaxiom*‘ abgeholfen werden, das dem Mengenbegriff oder dem Bereich $\mathfrak{B}$ *den geringsten mit den übrigen verträglichen Umfang* auferlegt. Verfährt man in dieser Art, so wird die Nullmenge zu dem einzigen Ding, das keine Menge [mit Elementen] ist; das genügt für alle mathematischen Zwecke und vereinfacht die Betrachtung sachlich und z. T. auch formal.“

Fraenkel plädiert also für einen Verzicht auf überflüssige Mengen. Zum einen sollen Urelemente verschwinden und das mengentheoretische Universum aus der Nullmenge aufgebaut sein. Zum anderen sollen die unendlich absteigenden $\in$-Ketten ausgeschlossen werden. Das Ziel ist der Axiomatik einen „kategorischen Charakter“ zu geben: Die Axiome sollen den Bereich $\mathfrak{B}$, das Mengenuniversum also, wenn möglich eindeutig beschreiben. (Auf die prinzipielle Unmöglichkeit eines solchen eindeutigen Systems kommen wir im zweiten Band zu sprechen.)

Auch wenn man auf Urelemente verzichtet, kann man in der aus der leeren Menge aufgebauten Mengenlehre eine Mengenlehre mit Urelementen simulieren, indem man geeignete Mengen als Urelemente ansieht, als ein $V_0{}^*$, und über diesen „Urelementen“ eine $V_\alpha{}^*$-Hierarchie in gewohnter Weise hochzieht. Geeignet heißt, dass während der Hierarchiebildung keine Mengen konstruiert werden, die Elemente der „Urelemente“ sind, dass also die in Wahrheit vorhandenen Elemente der „Urelemente“ dieser Hierarchie verborgen bleiben.

Von Neumann hat in seiner auf dem Funktionsbegriff aufgebauten Axiomatik ebenfalls ein Beschränkungsaxiom betrachtet.

---

von Neumann (1925):

„4. Es gibt kein II. Ding a [keine Funktion a] mit der folgenden Eigenschaft: Es ist für jede endliche Ordnungszahl (d. h. ganze Zahl) n

$[a, n + 1] \varepsilon [a, n]$ [*in unserer Schreibweise:* $a(\{ n \}) \in a(n)$].“

In der Arbeit „Grenzzahlen und Mengenbereiche“ von Zermelo aus dem Jahr 1930 findet sich dann der Name „Fundierungsaxiom“, und das Axiom erscheint in der heute üblichen Formulierung ohne unendliche $\in$-Abstiege.

Neben „Fundierungsaxiom“ ist auch die Bezeichnung „Regularitätsaxiom“ gebräuchlich.

Zermelo (1930):

„F) Axiom der Fundierung: Jede (rückschreitende) Kette von Elementen, in welcher jedes Glied Element des vorangehenden ist, bricht mit endlichem Index ab bei einem Urelement [oder bei $\emptyset$, ohne Urelemente immer bei $\emptyset$]. Oder, was gleichbedeutend ist: Jeder Teilbereich T [$\neq \emptyset$] enthält wenigstens ein Element t_0, das kein Element t in T hat [also $t_0 \cap T = \emptyset$].

Dieses letzte Axiom, durch welches alle ‚zirkelhaften‘, namentlich auch alle ‚sich selbst enthaltenden‘, überhaupt alle ‚wurzellosen‘ Mengen ausgeschlossen werden, war bei allen praktischen Anwendungen der Mengenlehre bisher immer erfüllt, bringt also vorläufig keine wesentliche Einschränkung der Theorie.“

Einfache Modelle

Bevor wir zum Auswahlaxiom kommen, wollen wir kurz einige interessante Modelle beschreiben, die auch ohne eine genaue Definition des Modellbegriffs ein gutes Bild von der Rolle des Fundierungsaxioms und dem Verhältnis der Zermeloaxiomatik und ihrer Anreicherung durch das Ersetzungsschema liefern.

Wir können z. B. in der Axiomatik ohne Fundierungsaxiom, aber mit Ersetzung die V_α-Hierarchie definieren. Die Vereinigung aller dieser V_α bildet dann einen Bereich $\mathfrak{V}$, in dem alle Axiome gelten, einschließlich des Fundierungsaxioms: Bilden wir in $\mathfrak{V}$ erneut die V_α-Hierarchie, so ist diese Hierarchie identisch mit der alten, und schöpft $\mathfrak{V}$ voll aus. Auf diese Weise kann man zeigen: Ist die Axiomatik ohne Fundierung widerspruchsfrei, so ist sie auch mit Fundierungsaxiom widerspruchsfrei. Das einschränkende Fundierungsaxiom kann, wie erwartet, keine Widersprüche generieren.

Die Zermelo-Axiomatik (ohne Fundierung und Ersetzung) beweist, dass die übliche Zahlentheorie widerspruchsfrei ist, denn bereits in dieser abgeschwächten Axiomatik lässt sich zeigen, dass ein Modell $\langle Z_0, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ für die Zahlentheorie existiert. Starke Theorien liefern typischerweise Modelle für schwächere

Theorien und beweisen damit die Widerspruchsfreiheit dieser Theorien. So auch für die Zermelo-Axiomatik selbst: In der Zermelo-Axiomatik erweitert um das Ersetzungsschema kann man Modelle für die Zermelo-Axiomatik angeben. Sei

$$Z^* = \bigcup_{n \in \omega} Z_n,$$

wobei wieder $Z_1 = \mathcal{P}(Z_0)$, $Z_2 = \mathcal{P}(Z_1)$, usw. Dann ist Z^* ein Modell der Zermelo-Axiomatik.

Neben Z^* haben wir in der Zermelo-Fraenkel-Axiomatik eine Fülle von Modellen für die Zermelo-Axiomatik: Für jede Limesordinalzahl $\alpha > \omega$ ist V_α ein Modell, etwa $V_{\omega+\omega}$. Man vergleiche damit, dass die volle Theorie nach dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz kein Modell von sich selbst konstruieren kann (es sei denn sie ist widerspruchsvoll). Erst in Erweiterungen der Axiomatik um große Kardinalzahlaxiome kann man beweisen, dass viele V_α-Stufen Modelle der Zermelo-Fraenkel-Axiomatik sind, d. h. dass in vielen Limesstufen V_α nicht nur Zermelos Axiomatik, sondern auch das Ersetzungsschema gilt. Diese Stufen sind so hoch, dass ein Ersetzungsprozess, bei dem die Elemente einer Menge $M \in V_\alpha$ durch Ordinalzahlen $\beta < \alpha$ ersetzt werden, unterhalb von α immer beschränkt bleibt. Kurz: Wir erreichen das Ende α des Ordinalzahlweges innerhalb von V_α nicht, indem wir M-viele Schritte machen, für ein beliebiges $M \in V_\alpha$.

Die Beweise dieser Behauptungen sind nicht trivial, aber auch nicht schwer. Es sind die einfachsten Beispiele der axiomatischen Mengenlehre für relative Konsistenzbeweise und Modellkonstruktionen für Teiltheorien starker Erweiterungen der Basisaxiomatik.

Damit kommen wir nun zu Zermelos Isolierung eines sehr natürlichen, und zugleich sehr starken Prinzips.

Das Auswahlaxiom

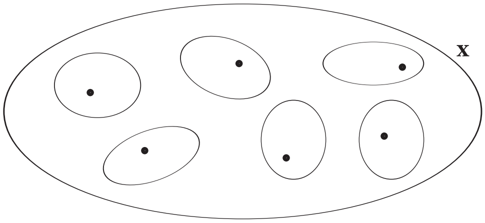
Das letzte Axiom unserer Liste, das „C“, gehört wieder der Axiomatik von Zermelo an.

(AC) Auswahlaxiom

Ist x eine Menge, deren Elemente nichtleer und paarweise disjunkt sind, so existiert eine Menge y, die mit jedem Element von x genau ein Element gemeinsam hat.

Die Abkürzung AC steht für engl. *axiom of choice*.

Das Auswahlaxiom ist ein Axiom im besten Sinne, da es unserer Intuition über den Mengenbegriff entspringt …



Die Menge der Punkte bildet eine Auswahlmenge y für x.

… und doch nimmt es aufgrund seines Charakters eine Sonderstellung unter den ZFC Axiomen ein. Die Auswahlmenge y, die das Axiom garantiert, ist „dunkel“, während die Mengen der anderen Existenzaxiome „hell“ sind:

Wir „sehen“ die Menge $Z_0 = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \dots \}$, die dem Unendlichkeitsaxiom genügt. Und die anderen Existenzaxiome (LM), (PA), (VER), (AUS) und (ERS) können wir als Instanzen des Komprehensionsaxioms schreiben, und wir sehen sie vor uns, sobald wir ihre definierende Eigenschaft kennen, so etwa für $\{ x, y \} = \{ z \mid z = x \text{ oder } z = y \}$ oder $\mathcal{P}(x) = \{ z \mid z \subseteq x \}$. (Wobei wir $\mathcal{P}(x)$ nur sehen, wenn wir einen Bereich von V überblicken können, der alle Teilmengen von x umfasst. Das Potenzmengenaxiom ist eher sammelnd denn erzeugend, und in diesem Sinne ist die Potenzmenge einer Menge halbhell und halbdunkel.)

Ein vergleichbares Sehen einer Auswahlmenge y für x ist dagegen nur in Spezialfällen möglich. Wir können die Menge y im Allgemeinen nicht in der Form $y = \{ z \mid \mathcal{E}(z) \}$ schreiben, es sei denn, alle $a \in x$ besitzen ausgezeichnete Elemente: Gibt es eine Eigenschaft $\mathcal{E}(z)$ mit:

„*für alle $a \in x$ existiert genau ein $z \in a$ mit $\mathcal{E}(z)$*“,

so können wir eine Auswahlmenge y mit Hilfe von $\mathcal{E}(z)$ sichtbar machen:

$$y = \{ z \in \bigcup x \mid \mathcal{E}(z) \}.$$

y existiert aufgrund des Vereinigungsaxioms und des Aussonderungsschemas.

Unsere Intuition gibt uns keinen Hinweis, dass stets ausgezeichnete Elemente innerhalb jedes $a \in x$ vorhanden sind. Und somit brauchen wir ein neues Axiom, um eine Auswahlmenge für beliebige x garantieren zu können. Die Auswahlmenge, die uns das Axiom liefert, ist allerdings in keiner Weise mehr eindeutig bestimmt, sie ist zufällig, sie ist „dunkel“. In einem sehr natürlichen Modell der Mengenlehre, dem konstruktiblen Universum L von Gödel, sind tatsächlich immer ausgezeichnete Elemente vorhanden, und wir können das Auswahlaxiom dann in diesem Modell auf der Basis der übrigen Axiome beweisen, da wir in diesem Modell für jedes x eine sichtbare Auswahlmenge definieren können.

Berühmt ist die populäre Formulierung durch Bertrand Russell: Gegeben eine unendliche Menge von Schuhpaaren, können wir ohne Auswahlaxiom eine Menge definieren, die von jedem Paar genau einen Schuh enthält, z. B. die Menge aller linken Schuhe. Dagegen brauchen wir für eine unendliche Menge von Sockenpaaren das Auswahlaxiom, da wir keine Möglichkeit haben, zwischen linken und rechten Socken zu unterscheiden.

Zermelo hat sein Axiom der „simultanen Auswahl" in seinen Beweisen des Wohlordnungssatzes von 1904 und 1908 substantiell verwendet, und es als allgemeines Prinzip isoliert. Sein Beweis von 1904 hat eine kontroverse und weitgehend irrationale Diskussion um die Legitimation einer „simultanen Auswahl" hervorgerufen. Heute ist das Auswahlaxiom ein fundamentaler und unumstrittener Bestandteil der Axiomatik der Mengenlehre. Es gibt aber mittlerweile interessante Modelle der Mengenlehre, in denen lediglich abgeschwächte Formen des Auswahlaxioms, sonst aber alle übrigen Axiome – und andere – gelten.

Die Formulierung von (AC) über paarweise disjunkte Mengen ist sehr einfach und anschaulich. Häufig werden aber Auswahlfunktionen gebraucht:

Übung

Zeigen Sie, dass (AC) auf der Basis der übrigen Axiome jeweils äquivalent ist zu:

(i) Ist M eine Menge mit $\emptyset \notin M$, so existiert eine Funktion $f : M \to \bigcup M$ mit $f(x) \in x$ für alle $x \in M$.

(ii) Ist g eine Funktion mit $g(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in \mathrm{dom}(g)$, so existiert eine Funktion f mit $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ und $f(x) \in g(x)$ für alle $x \in \mathrm{dom}(f)$.

(iii) Jede Äquivalenzrelation besitzt ein vollständiges Repräsentantensystem.

Die Aussage (ii) kann man auch so formulieren: Es gilt $\times_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ für alle Mengen $I \neq \emptyset$, falls $A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Wissen wir, dass eine Menge M nichtleer ist, so ist für „Sei also $x \in M$ beliebig." natürlich kein Auswahlaxiom notwendig. Allgemein zeigt man durch Induktion nach $|M|$ ohne Auswahlaxiom, dass für $\mathbb{N}$-endliche Mengen M mit $\emptyset \notin M$ immer eine Auswahlfunktion wie in (i) existiert, oder dass das kartesische Produkt von endlich vielen nichtleeren Mengen immer nichtleer ist.

Das Auswahlaxiom wird für die meisten weitergehenden Resultate über Mächtigkeiten gebraucht. Eine Ausnahme bildet der Satz von Cantor-Bernstein, der sich ohne Verwendung von (AC) beweisen lässt. Dagegen ist für einen Beweis des Vergleichbarkeitssatzes das Auswahlaxiom unverzichtbar. Selbst den Satz, dass die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist, kann man nicht ohne eine Form von (AC) beweisen. In den beiden ersten Abschnitten haben wir das Auswahlaxiom darüber hinaus an mehreren Stellen wesentlich benutzt, und durch „ein …" darauf hingewiesen. Diese Ausdrucksweise „$g(y)$ = ‚ein $x \in M$ mit $\mathcal{E}(x, y)$'" ist in der axiomatischen Mengenlehre nur eine bequeme Sprechweise für $g(y) = f(\{ x \in M \mid \mathcal{E}(x, y)\})$, wobei f eine Auswahlfunktion wie in (i) der Übung oben ist, die man zu Beginn des Beweises auf $\mathcal{P}(M) - \{ \emptyset \}$ fixiert (vgl. etwa Zermelos Beweis des Wohlordnungssatzes). Dieses Präludium der Fixierung einer Auswahlfunktion lenkt aber i. A. nur ab, es genügt, wenn man während des Beweises sicherstellt, dass für alle y ein $x \in M$ mit $\mathcal{E}(x, y)$ existiert. Man führt also Beweise üblicherweise ganz wie gehabt mit „ein …“.

Vorsicht ist geboten bei der Rekursion über alle Ordinalzahlen. Dort ist $\mathcal{G}(\alpha)$ = „ein …“ i.a. nicht erlaubt, da wir in ZFC i.a. keine definierbare Auswahloperation $\mathcal{F}$ auf $V - \{\emptyset\}$ haben. Im Beweis des Rekursionssatzes wird eine feste Operation $\mathcal{F}$ gebraucht. Läuft die Rekursion über eine Wohlordnung (d. h. eine Menge), so ist „ein …“ möglich, da man dann eine Auswahlfunktion benutzen kann. Allgemein macht z. B. $\mathcal{G}(\alpha)$ = „ein $x \in V_{\alpha+1} - V_\alpha$“ in ZFC keinen Sinn.

Übung

Lokalisieren Sie die Verwendung von (AC) in den Beweisen von:

(i) $|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$ für alle Mengen M, N.

(ii) $\bigcup \{ A_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist abzählbar, falls alle A_n abzählbar sind.

(iii) „$|M| \leq |N|$“ *gdw* „es existiert ein $f : N \to M$ surjektiv“.

(iv) M ist (Dedekind-)endlich *gdw* „$|M| = |\overline{n}|$ für ein $n \in \mathbb{N}$“.

Das Auswahlaxiom kommt in vielen Bereichen der Mathematik wesentlich zum Einsatz, zumeist in Gestalt eines Maximalprinzips.

Hier noch einmal eine kleine Liste für den notwendigen Einsatz des Auswahlaxioms, vgl. auch die Diskussion von Maximalprinzipien in 2.5: „jede Äquivalenzrelation hat ein vollständiges Repräsentantensystem“, „jeder Vektorraum hat eine Basis“, Satz von Hahn-Banach, Satz von Tychonov, Existenz- und Eindeutigkeitssatz des algebraischen Abschlusses eines Körpers, Kompaktheitssatz der Logik, Satz von Tarski über die Existenz von Ultrafiltern, Primidealtheorem für Boolesche Algebren.

Es ist zudem verantwortlich für die Existenz von nicht Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$, und für andere „paradoxe“ Konstruktionen, die der Maßtheorie i. A. den Zugang zur vollen Potenzmenge einer Menge, deren Teilmengen sie gerne messen möchte, verwehren.

In der Mengenlehre ist (AC) unter anderem äquivalent (über den anderen Axiomen) zum Wohlordnungssatz, zum Vergleichbarkeitssatz, zum Satz von Zermelo-Zorn und zum Multiplikationssatz.

Zermelo (1908b):

„**Axiom VI.** Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S}T$ mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem Element von T ein und nur ein Element gemein hat.

(Axiom der Auswahl.)“

Damit sind alle Axiome von ZFC vorgestellt. Es gibt alternative Axiomatisierungen – das System NBG von Neumann-Bernays-Gödel und das System MK von Morse-Kelley –, die sich aber von ZFC nicht durch den Gehalt der Axiome unterscheiden, sondern durch die liberalere Behandlung von Klassen, also von

Zusammenfassungen $\{ x \mid \mathscr{E}(x) \}$. In diesen Systemen ist jedes Objekt eine Klasse, und die Klassen, die Elemente einer anderen Klasse sind, sind die Mengen. Jede Menge ist eine Klasse, aber nicht umgekehrt. Die Mengen sind dann gerade die „kleinen“ Klassen des Systems. In diesen Systemen kann man also offiziell über Objekte $\{ x \mid \mathscr{E}(x) \}$ reden, während wir Klassen in ZFC nur als bequeme Sprechweise verwenden werden (hierzu und zu NBG und MK siehe 3.3). Insgesamt verfolgen diese alternativen Systeme eine zur Zermelo-Fraenkel-Axiomatik recht ähnliche Interpretation der Paradoxien.

Wir listen die Axiome von ZFC mit einer Beschreibung ihres Charakters noch einmal in anderer Anordnung auf.

Die ZFC-Axiome

(EXT)	**Extensionalitätsaxiom**	Beschreibung von $=$, $\in$
(FUN)	**Fundierungsaxiom**	Beschreibung von $\in$
(LM)	**Existenz der leeren Menge**	elementares Existenzaxiom
(PA)	**Paarmengenaxiom**	elementares Existenzaxiom
(VER)	**Vereinigungsmengenaxiom**	elementares Existenzaxiom
(AUS)	**Aussonderungsschema**	elementares Existenzaxiom
(UN)	**Unendlichkeitsaxiom**	starkes Existenzaxiom
(ERS)	**Ersetzungsschema**	starkes Existenzaxiom
(POT)	**Potenzmengenaxiom**	starkes Existenzaxiom
(AC)	**Auswahlaxiom**	starkes Existenzaxiom

Gängige Bezeichnungen für bestimmte Teilsysteme von ZFC sind:

Z = ZFC ohne (ERS), (FUN), (AC)

ZF = ZFC ohne (AC)

ZFC^- = ZFC ohne (POT)

ZF^- = ZF ohne (POT)

ZFC ist das Ergebnis einer natürlichen und sorgfältigen Analyse der intuitiven Begriffe Menge und Element. Diese Analyse ist dabei an den Bedürfnissen der mathematischen Praxis orientiert – Zermelo ließ sich bei der Aufstellung seiner Axiome von seinem Beweis des Wohlordnungssatzes leiten – und ist frei von philosophischen Dogmen und Verboten. Alle wesentlichen Ergebnisse der Cantorschen Mengenlehre bleiben erhalten und die Antinomien des vollen Komprehensionsprinzips lösen sich auf. Die auf der Elementrelation basierende Sprache erweist sich zudem bei all ihrer Einfachheit als suggestiv und ausdrucksstark, und trägt wesentlich zum Erfolg der axiomatischen Mengenlehre bei.

Es hat sich gezeigt, dass diese Analyse auch vollständig unsere Intuition erschöpft: ZFC reicht für die ganze Mathematik als Basistheorie aus, und dies spricht dafür, dass keine einfachen und unmittelbar intuitiven Axiome mehr zu ZFC hinzukommen werden. ZFC scheint auch korrekt zu sein: Bis zum heutigen Tag sind in ZFC keine Widersprüche festgestellt worden. Ein mathematischer Beweis der Widerspruchsfreiheit von ZFC lässt sich, wie erwähnt, aufgrund des zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes generell nicht erbringen (es sei denn, ZFC ist widerspruchsvoll).

Denkbar ist allenfalls, dass das Konzept eines fertigen unendlichen Objekts für sich schon zu Widersprüchen führt. Das mittlerweile sehr umfangreiche Gebäude der Mengenlehre zeigt aber, dass ein solcher Widerspruch, wenn es ihn überhaupt gibt, wahrscheinlich sehr tief liegt, im Gegensatz etwa zu den klassischen Paradoxien. Wir müssen mit der Möglichkeit eines Widerspruchs in ZFC leben.

Cantor hat Ende des 19. Jahrhunderts aus seiner Mengendefinition Prinzipien über die Existenz von Mengen abgeleitet. Er denkt zu dieser Zeit intensiv über seine Unterscheidung beliebiger Vielheiten (Klassen) in „fertige Mengen/konsistente Vielheiten" (Mengen) und „inkonsistente Vielheiten/absolut unendliche Vielheiten" (echte Klassen) nach. In einem Brief an Hilbert im Jahre 1898 isoliert er einige Prinzipien, die beschreiben, wann eine Vielheit als fertig und damit als Menge gelten darf. Eine klare Antwort auf die Vielheits-Frage konnte er nicht geben. Der folgende Auszug aus dem Brief an Hilbert zeigt aber einmal mehr sein tiefes Verständnis des Mengenbegriffs: In Folgerung II dieses Briefes formuliert er bereits das Ersetzungsaxiom, das erst Jahrzehnte später zur Axiomatik von Zermelo als „vergessenes Axiom" hinzukam, und das beim axiomatischen Aufbau der Mengenlehre heute eine wichtige Rolle spielt. In Folgerung IV formuliert er das Potenzmengenaxiom. Interessant ist, dass ihm die Begründung von IV mit Hilfe seiner Mengendefinition bereits zwei Tage später nicht mehr unproblematisch erscheint.

Georg Cantor an David Hilbert über „fertige Mengen“

„Lieber Herr Kollege,

Zu dem, was ich Ihnen am 6ten Oktober geschrieben, möchte ich noch einiges hinzufügen, mit dem Ersuchen, Alles was ich Ihnen schreibe, Ihrer Kritik zu unterwerfen.

Aus der Definition:

> ‚Unter einer *fertigen Menge* verstehe man jede Vielheit, bei welcher alle Elemente *ohne Widerspruch* als *zusammenseiend* und daher als *ein Ding für sich* gedacht werden können.‘

ergeben sich mancherlei Sätze, unter Anderm diese:

I ‚Ist M eine fertige Menge, so ist auch jede Teilmenge von M eine fertige Menge.‘

II ‚Substituiert man in einer fertigen Menge an Stelle der Elemente fertige Mengen, so ist die hieraus resultierende Vielheit eine fertige Menge.‘

III ‚Ist von zwei äquivalenten [gleichmächtigen] Vielheiten die eine eine fertige Menge, so ist es auch die andere.‘

IV ‚Die Vielheit *aller Teilmengen* einer fertigen Menge M ist eine fertige Menge.‘ Denn alle Teilmengen von M sind ‚zusammen‘ in M enthalten; der Umstand, dass sie sich teilweise decken, schadet hieran nichts.“

(Georg Cantor an David Hilbert, Brief vom 10.10.1898. In: Cantor, 1991, Briefe)

„Lieber Herr Kollege,

Unter Bezugnahme auf mein Schreiben vom 10ten, stellt sich bei genauerer Erwägung heraus, dass der Beweis des Satzes IV keineswegs so leicht geht. Der Umstand, dass die *Elemente* der ‚Vielheit *aller Teilmengen* einer fertigen Menge‘ sich teilweise decken, macht ihn illusorisch. In die Definition der fertigen Menge wird die Voraussetzung des *Getrenntseins* resp. *Unabhängigseins* der Elemente als *wesentlich* aufzunehmen sein.

Hoffentlich führt unsere Diskussion zur allmähligen Klärung der Schwierigkeiten.

Mit bestem Gruß
Ihr
G. C.“

(Georg Cantor an David Hilbert, Brief vom 12.10.1898. In: Cantor, 1991, Briefe)

2. Die Sprache der Mengenlehre

In diesem Kapitel stellen wir den formalen Rahmen für die axiomatische Mengenlehre auf. Wir konstruieren eine mathematische Kunstsprache, in der wir die Axiome der Mengenlehre und allgemeiner beliebige mengentheoretische Aussagen formulieren können.

Die formale Welt ist die Welt größtmöglicher mathematischer Präzision. Da die in ihr herrschende Form der Genauigkeit für die übliche menschliche Mathematik unfruchtbar ist – formale Beweise führt nur eine Maschine, und das bislang recht dürftig –, liegt diese Welt normalerweise zurecht unter der Oberfläche. Dieser mathematische Keller hat aber bei all seiner Unwirtlichkeit doch einige interessante Aspekte zu bieten. Für metamathematische Resultate ist ein formales System unverzichtbar, auch wenn die Beweise dieser Resultate dann schließlich wieder in der flexibleren mathematischen Umgangssprache geführt werden.

Beispiel einer Analyse einer Eigenschaft

Wir hatten oftmals Ausdrücke verwendet der Form: „Sei $\mathcal{E}(x)$ eine Eigenschaft“, etwa im Aussonderungs- und Ersetzungsaxiom. Was genau ist nun eine solche Eigenschaft? Zermelo spricht in seiner Axiomatik im Aussonderungsschema statt von Eigenschaften von „definiten Aussagen“. Die Kritik an seinem unscharfen Eigenschaftsbegriff blieb nicht aus. Der von Thoralf Skolem in folgendem Auszug aus einer Rede von 1922 vorgeschlagene Weg führt direkt zu der heute üblichen Präzisierung der Begriffe einer mathematischen Eigenschaft und einer mathematischen Aussage.

Skolem (1922): „Bisher hat, soweit mir bekannt nur e i n solches Axiomensystem eine ziemlich allgemeine Anerkennung gefunden, nämlich das von E. Zermelo aufgestellte …

Zermelo betrachtet einen Bereich B von Dingen, unter denen die Mengen einen Teil bilden. Zwischen diesen Dingen bestehen Beziehungen der Form a ε b (a Element von b) und a = b. Für diesen Bereich sollen dann 7 Axiome erfüllt sein …

Ein sehr unvollkommener Punkt bei Zermelo ist der Begriff ‚definite Aussage‘. Die Erklärungen Zermelos darüber wird wohl keiner befriedigend finden. Soweit mir bekannt, hat niemand versucht, diesen Begriff streng zu formulieren, was sehr sonderbar ist, da dies leicht zu machen ist und zwar in einer sehr natürlichen Weise, die sich von selbst ergibt. Um dies zu erklären – und auch mit Rücksicht auf die späteren Betrachtungen – erwähne ich hier die 5 Grundoperationen der mathematischen Logik, wobei ich die Bezeichnungen E. Schröders (Algebra der Logik) benutze:

$1_\times$. Die Konjunktion. Durch einen Punkt oder Nebeneinanderstellung bezeichnet.

1_+. Die Disjunktion. Durch das Zeichen + bezeichnet.

2. Die Negation. Durch einen Strich bezeichnet, der oberhalb des zu negierenden Ausdrucks geschrieben wird.

$3_\times$. In jedem Falle Gültigkeit. Durch das Zeichen Π bezeichnet.

3_+. In mindestens einem Falle Gültigkeit. Durch das Zeichen Σ bezeichnet.

Bekanntlich braucht man eigentlich nur 3 dieser 5 Operationen, weil $1_\times$ und 1_+ ebenso wie $3_\times$ und 3_+ mit Hilfe von 2 auseinander ableitbar sind.

Unter einer definiten Aussage kann man jetzt einen endlichen Ausdruck verstehen, der von Elementaraussagen der Form a ε b oder a = b mit Hilfe der 5 genannten Operationen [Konjunktion, Disjunktion, Negation, Allquantifizierung, Existenzquantifizierung] aufgebaut ist.

Das ist ein vollkommen klarer Begriff und hinreichend umfassend, um alle gewöhnlichen mengentheoretischen Beweise durchführen zu können. Ich lege deshalb diese Auffassung hier zu Grunde."

Die Ausdrücke „a ∈ b" und „a = b" werden also durch logische Kombination und Quantifizierung zu mengentheoretischen Aussagen. Man verwendet heute andere Zeichen als Schröder und Skolem – ein Querstrich über einer ganzen Formel als Negation ist völlig untragbar –, aber was Skolem hier beschreibt und vorschlägt, ist die Erziehung der Mengenlehre in der Sprache der Prädikatenlogik, ganz so, wie es heute der Brauch ist.

Bevor wir die Syntax dieses Esperantos der Mengenlehre genauer einführen, analysieren wir eine spezielle Eigenschaft $\mathscr{E}$(R), nämlich:

(1) *R ist eine (zweistellige) Relation.*

Wir schreiben „R ist eine Relation" ausführlicher als:

(2) *Für alle x ∈ R gilt: x ist ein geordnetes Paar.*

Dies wiederum können wir in mehreren Schritten immer ausführlicher schreiben:

(3) *Für alle x ∈ R gibt es y, z mit x = { { y }, { y, z } }.*

(4) *Für alle x ∈ R gibt es y, z mit:*
{ y } ∈ x und { y, z } ∈ x
und:
für alle z′ ∈ x gilt: z′ = { y } oder z′ = { y, z }.

(5) *Für alle x ∈ R gibt es y, z mit:*
es gibt ein a ∈ x mit: für alle u gilt: u ∈ a gdw u = y
und:
es gibt ein b ∈ x mit: für alle u gilt: u ∈ b gdw u = y oder u = z
und:
für alle z′ ∈ x gilt:
für alle u gilt: u ∈ z′ gdw u = y
oder
für alle u gilt: u ∈ z′ gdw u = y oder u = z.

In dieser Form haben wir zwar die Les- und Verstehbarkeit von

„*R ist eine Relation*“

fast verloren, jedoch haben wir diese Aussage nun in einen gleichwertigen Ausdruck verwandelt, der lediglich enthält:

(i) *Variablen x, y, z, z′, R, …*

(ii) *die logischen Quantoren* „für alle … gilt“ und „es gibt … mit“,

(iii) *die logischen Verknüpfungen* „gdw“, „oder“, „und“,

(iv) *atomare Ausdrücke* der Form „$x = y$“, „$x \in y$“.

Im obigen Beispiel kommen alle Variablen x mit Ausnahme von R in der Form „für alle x“ oder „es gibt ein x“ vor: Sie sind *gebunden*, während R *frei* ist.

Mit (i) – (iv) haben wir schon die wesentlichen Elemente unserer Sprache beisammen. Wir werden Eigenschaften $\mathcal{E}$ und mathematische Aussagen selten derart elementar ausschreiben, aber wir könnten es im Prinzip tun.

Wir können auch Exaktheit *und* Lesbarkeit zugleich erreichen, wenn wir bereits definierte Begriffe zulassen. Wenn wir z. B. jetzt „f ist eine Funktion“ genau ausschreiben wollen, so schreiben wir „f ist eine Relation *und* f ist rechtseindeutig“, und müssen uns nur noch um den zweiten Teil kümmern, da wir den Begriff „f ist eine Relation“ schon exakt eingeführt haben.

Ein subtiler Punkt ist hier die Variablenkollision: Oben haben wir „R ist eine Relation“ definiert. Wenn wir nun „f ist eine Relation“ ausschreiben wollen, müssen wir lediglich in (5) die Variable R überall durch die Variable f ersetzen. Wenn wir nun aber „x ist eine Relation“ exakt definieren wollen, kommt es in (5) zu einer Kollision der Variablen, da x dort als Hilfsvariable verwendet wird. Man kann derartige Kollisionen immer umgehen, indem man zunächst alle Hilfsvariablen geeignet umbenennt, und dann überall die Substitution durchführt.

Auch in obigem Beispiel wäre das Verfahren des Rückgriffs auf bereits Definiertes nützlich gewesen. Zuerst schreiben wir ausführlich auf, was ein geordnetes Paar ist (und hierfür noch früher, was $\{ y \}$ und $\{ y, z \}$ ist). Nach diesen Vorbereitungen ist „f ist Relation“ durch „für alle $x \in f$ gilt: x ist ein geordnetes Paar“ exakt definiert. Man kann wie erwartet zeigen, dass solche Anreicherungen der Sprache um definierte Begriffe keine neue Ausdrucksstärke mit sich bringen, da sich die eingeführten Begriffe wieder eliminieren lassen – wir können sie einfach als Abkürzungen ansehen.

Wir erhalten so kumulativ einen Bestand an exakt definierten mathematischen Begriffen, mit dem wir schließlich fast so frei umgehen können wie zuvor, nur dass wir jetzt Definitionen zur Verfügung haben, die sich letztendlich auf „$x \in y$“ und „$x = y$“ zurückführen lassen. Vor allem aber erhalten wir eine Definition dessen, was überhaupt eine Eigenschaft von x ist: Eine Eigenschaft von x ist einfach ein syntaktisch korrekter Ausdruck unserer Kunstsprache, der lediglich x als „freie Variable“ enthält, d. h. über alle anderen in dem Ausdruck vorkommenden Variablen y, z, usw. wird in der Form „für alle y“ oder „es gibt ein y“, usw. quantifiziert. Beliebige syntaktisch korrekte Ausdrücke heißen *Formeln*. Weiter ist eine *Aussage* oder ein *Satz* eine Formel unserer Kunstsprache ohne freie Variable.

Übung

Schreiben Sie die Eigenschaften

(i) „$f : A \to B$ ist eine Bijektion“,

(ii) „x ist unendlich“ (Dedekind-Definition),

(iii) „x ist abzählbar“,

(iv) „y ist die Potenzmenge von x“

wie im Beispiel für „R ist Relation“ aus, unter Verwendung von bereits definierten Eigenschaften. ((i) ist ein Ausdruck mit drei freien Variablen: f, A, B; (iv) hat die freien Variablen x, y.) Ebenso für die Aussagen:

(v) „für alle x existiert $\mathcal{P}(x)$“,

(vi) „für alle x existiert keine Bijektion $f : x \to \mathcal{P}(x)$“.

[„nicht“ gilt wie „und“, „oder“, … als Bestandteil der Sprache.]

Metaebene und Metamathematik

Bei der Festsetzung und Analyse des formalen Rahmens für die Mengenlehre oder allgemeiner für die Mathematik befinden wir uns auf einer anderen Ebene als üblich. Wir diskutieren keine inhaltlichen Fragen über Mengen oder andere mathematischen Objekte, sondern formulieren die Sprache und die Regeln einer solchen Diskussion. Diese zweite Ebene wird als „Metaebene“ bezeichnet. Die Metaebene beschäftigt sich – in mathematischer Weise – mit der Mathematik selbst.

In den ersten beiden Abschnitten wurde ein Rahmen für die Mathematik überhaupt nicht weiter diskutiert – die Mengenlehre haben wir nach dem Schema Definition, Satz, Beweis entwickelt in einer für die Mathematik geeigneten Form der Umgangssprache, in der z. B. „es gibt ein x“ per Konvention bedeutet „es gibt mindestens ein x“. Was ein Satz, eine Definition, ein Beweis ist, wurde nie besprochen – man lernt diese Dinge durch Nachahmung.

Nun wollen wir die Mengenlehre als mathematische Theorie betrachten, und dabei z. B. die Frage beantworten, was eine mengentheoretische Eigenschaft ist. Unser Vorgehen ist dabei dem der üblichen Mathematik sehr ähnlich. Im Unterschied zur üblichen Mathematik besitzt die Metaebene jedoch einen gänzlich finiten Charakter, ihre Gegenstände sind konkrete Objekte, nämlich Zeichenreihen und Listen von Zeichenreihen. (Oder in einer akustischen Kultur: Lautfolgen und Sequenzen von Lautfolgen.)

Auf der Metaebene haben wir ein gewisses Maß an mathematischen Hilfsmitteln zur Verfügung, etwa die (metamathematischen) natürlichen Zahlen, einfache

Arithmetik mit diesen Zahlen, usw. Wir verzichten hier darauf, genau aufzulisten, welche mathematischen Hilfsmittel wir auf der Metaebene verwenden. Es genügt uns hier, darauf zu achten, dass wir den finiten Charakter der Metaebene an keiner Stelle sprengen. Fertige unendliche Objekte werden an keiner Stelle benötigt. Auch Aussagen wie „für alle metamathematischen n gilt …“ werden nie wirklich für alle n benötigt – wie auch in einer endlichen Welt ? –, sondern sagen uns, was für ein beliebiges konkretes n gilt, und die zugehörigen Beweise zeigen uns, warum dies für jedes n so sein muss. Wir lassen Induktion und Rekursion als eine Sprechweise zu, die letztendlich lediglich Schemata generiert. Alles auf der Metaebene ist effektiv und in konkreten Fällen auflösbar. Der Leser betrachte etwa: „Jeder Satz, der aus den Worten ‚Aal‘, ‚Waage‘ und ‚rabenschwarz‘ zusammengesetzt ist, hat eine gerade Anzahl von Buchstaben ‚a‘.“ Um dies einzusehen, brauchen wir nicht wirklich eine Metatheorie, die über unendliche Mengen von Sätzen redet, Funktionen auf den metamathematischen natürlichen Zahlen studiert, usw. Eine Induktion über die Anzahl n der Wörter eines Satzes bestehend aus den drei Wörtern zeigt die Behauptung, und ist völlig gleichwertig zu: „Streiche das letzte Wort und addiere 2 zur bisherigen Anzahl der gefundenen a’s. Wiederhole das Verfahren, bis kein Wort mehr übrig ist.“

Auch von endlichen oder effektiv unendlichen Mengen auf der Metaebene zu reden ist problemlos. Um die Ebenen auseinanderzuhalten, und um den effektiven Charakter der Metaebene zu betonen, reden wir aber bevorzugt von Listen.

Die Metamathematik besteht aus den Ergebnissen, die sich über eine formalisierte Mathematik gewinnen lassen. Resultate der Metamathematik sind:

„*Die Kontinuumshypothese ist in ZFC weder beweisbar noch widerlegbar, wenn ZFC widerspruchsfrei ist.*“

„*Die Widerspruchsfreiheit von ZFC kann innerhalb von ZFC nicht bewiesen werden, wenn ZFC widerspruchsfrei ist.*“

„*Wenn ZF widerspruchsfrei ist, so ist auch ZFC widerspruchsfrei.*“

Durch die im ersten Abschnitt geschilderte Verwendung von Modellen wird es möglich, dass z. B. der Beweis der ersten dieser drei metamathematischen Aussagen in einer Weise geführt wird, die sich von üblichen mathematischen Beweisen kaum unterscheidet. Keineswegs wird das Ziel durch Analyse der Syntax erreicht, sondern durch Konstruktion von zwei Modellen von ZFC, in denen (CH) einmal wahr und einmal falsch ist. Aus der Korrektheit des Modellbegriffs für den formalen Rahmen folgt dann die Unmöglichkeit eines formalen Beweises von (CH) oder non (CH). Auf diese Weise kann die menschliche Seite der Mathematik in die Metaebene integriert werden. Letztendlich ist aber jeder derartige Beweis, der eine metamathematische Aussage durch eine Flucht in die Objektwelt zeigt, so effektiv wie das Zählen des Buchstabens a in einem beliebigen Satz. Er liefert im Fall der Nichtbeweisbarkeit und Nichtwiderlegbarkeit der Kontinuumshypothese ein komplexes, aber dennoch konkretes Verfahren, das folgendes leistet: Es nimmt einen Beweis in ZFC entgegen. Ist dieser Beweis ein Beweis von (CH) oder von non (CH), so wird dieser Beweis in einen Beweis von „0 = 1“ in ZFC umgewandelt.

Die Sprache $\mathscr{L}$ der Mengenlehre

Wir werden nun die Kunstsprache der Mengenlehre definieren. Syntaktische Angelegenheiten sind immer ein wenig trocken, und zugleich gehen sie mit Definitionsfluten einher. Wir bemühen uns um Kürze, und verzichten bewusst auf eine allzu penible Darstellung.

Es ist üblich, auch auf der Metaebene die Begriffe *Definition*, *Satz*, *Beweis* zu verwenden, obwohl sie vielleicht eher *Festsetzung*, *Faktum* und *Nachweis* genannt werden sollten, da es um Aussagen über die Realität geht. Man vergleiche den Unterschied von „der Ausdruck b } x ∃ y) enthält den Buchstaben z nicht“, ein Faktum, und „5 ist eine Primzahl“, ein mathematischer Satz.

Die Zeichen von $\mathscr{L}$

Definition *(Zeichen)*

Die *Zeichen von $\mathscr{L}$* bestehen aus:

(i) *Variablenzeichen* $v_0, v_1, v_2, \ldots,$

(ii) den *Relationszeichen* = und ∈ [gelesen: „gleich“ und „Element von“],

(iii) den *Quantorenzeichen* ∀ und ∃ [gelesen: „für alle“ und „es gibt“],

(iv) den *Junktorenzeichen* ¬, ∧, ∨, →, ↔ [non, und, oder, folgt, genau-dann-wenn],

(v) *Klammersymbolen* (und).

In (i) meinen wir, dass wir einen beliebig großen Vorrat an Variablenzeichen zur Verfügung haben. Wir indizieren diese Zeichen mit (metamathematischen) natürlichen Zahlen.

Die Ausdrücke und Formeln von $\mathscr{L}$

Definition *(Ausdrücke)*

Ein *Ausdruck von $\mathscr{L}$* ist eine Liste $s_0\ s_1\ s_2\ \ldots\ s_n$, in der jedes s_i ein Zeichen von $\mathscr{L}$ ist.

So ist z. B. $)v_1{=}{\leftrightarrow}))\forall$ ein Ausdruck von $\mathscr{L}$.

Wir verwenden auch alle Buchstaben, die wir bislang für Mengen verwendet haben, als Variablenzeichen. Dies dient lediglich der Bequemlichkeit. Schreiben wir im Folgenden z. B. „sei A ein Ausdruck der Form x = y“, so sind mit x, y immer Variablenzeichen gemeint, d. h. es gibt i, j, sodass A die Zeichenkette $v_i = v_j$ ist.

Definition *(Primformeln und Formeln)*

Die *Primformeln* oder *atomaren Formeln* von $\mathcal{L}$ sind festgelegt durch:

(i) Jeder Ausdruck der Form „$x = y$“ oder „$x \in y$“ ist eine Primformel.

(ii) Keine weiteren Ausdrücke sind Primformeln.

Die *Formeln* von $\mathcal{L}$ sind festgelegt durch:

(i) Jede Primformel ist eine Formel.

(ii) Ist φ eine Formel, so ist auch $\neg\varphi$ eine Formel.

(iii) Sind φ und ψ Formeln, so sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Formeln.

(iv) Ist x eine Variable und φ eine Formel, so sind auch $\forall x \varphi$ und $\exists x \varphi$ Formeln.

(v) Keine weiteren Ausdrücke sind Formeln.

Im Folgenden verwenden wir zumeist kleine griechische Buchstaben für Formeln.

Damit sind die wesentlichen Bestandteile von $\mathcal{L}$ definiert. $\mathcal{L}$ wird auch als *die Prädikatenlogik erster Stufe für die Symbolmenge $\{ \in \}$* bezeichnet.

Für die Junktoren würden bereits z. B. $\neg$ und $\wedge$ genügen, denn $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ lassen sich mit diesen Junktoren in ihrer gewünschten Bedeutung einführen. Ebenso ließe sich z. B. der Existenzquantor mit Hilfe des Allquantors einführen:

$$\begin{aligned}
\varphi \vee \psi &= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\\
\varphi \rightarrow \psi &= \neg\varphi \vee \psi,\\
\varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi),\\
\exists x \varphi &= \neg \forall x \neg \varphi.
\end{aligned}$$

Beschränkt man sich in der Sprache auf $\neg$, $\wedge$ und $\forall$, so sind diese vier Gleichungen einfach Definitionen von $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$. In unserer reichhaltigeren Sprache sind $\varphi \vee \psi$ und $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ usw. verschiedene Formeln, die jedoch logisch äquivalent sind, d. h. wir können $\varphi \vee \psi$ genau dann formal beweisen, wenn wir $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ formal beweisen können. (Zum formalen Beweisbegriff s.u.)

Wir wollen Klammern wo immer möglich sparen, und vereinbaren hierzu die folgende Bindungsstärke der Quantoren und Junktoren:

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (in absteigender Bindungsstärke).

Also bedeutet $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ die Formel $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$, und nicht $\varphi \wedge (\psi \rightarrow \chi)$.
Weiter schreiben wir oft

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi$ kurz als $\forall x_1, \ldots, x_n \varphi$.

Ebenso für den Existenzquantor.

Unsere Sprache erlaubt keine Formeln der Gestalt $\forall x \in y\ \varphi$, $\exists x \in y\ \varphi$, wie sie in obiger Analyse von „R ist eine Relation“ auftauchen. Wir führen hierzu zwei Abkürzungen ein, die sehr häufig verwendet werden:

$$\forall x \in y\ \varphi \;=\; \forall x\,(x \in y \to \varphi),$$

$$\exists x \in y\ \varphi \;=\; \exists x\,(x \in y \wedge \varphi).$$

Die Punktnotation

Sehr viele Klammern kann man sich durch die *Punktnotation* sparen: Ein Punkt hinter einem Quantor bedeutet, dass der Wirkungsbereich eines Quantors so groß ist wie möglich. Weiter erlauben wir nun auch Klammern um Quantoren der Form $(\forall x.\ \dots)$ und $(\exists x.\ \dots)$.

Beispiele

(i) $\forall x.\ \varphi \to \exists y.\ \psi \wedge \chi$ ist die Formel $\forall x\,(\varphi \to \exists y\,(\psi \wedge \chi))$.

(ii) $(\forall x.\ \varphi \to \exists y.\ \psi \wedge \chi) \to \rho$ ist die Formel $(\forall x\,(\varphi \to \exists y\,(\psi \wedge \chi)) \to \rho)$.

Diese Konventionen führen keine neuen Formeln ein, sondern erlauben lediglich, Formeln suggestiver und lesbarer zu notieren.

Freie Variablen und die Sätze von $\mathscr{L}$

Definition *(freie Variablen)*

Die freien Variablen einer Formel sind wie folgt festgelegt.

(i) Die freien Variablen von $x = y$ und $x \in y$ sind x, y.

(ii) Die freien Variablen von $\neg\,\varphi$ sind die freien Variablen von φ.

(iii) Die freien Variablen von $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ und $\varphi \leftrightarrow \psi$ bestehen aus den freien Variablen von φ und den freien Variablen von ψ.

(iv) Die freien Variablen von $\forall x\ \varphi$ und $\exists x\ \varphi$ sind die freien Variablen von φ ohne die Variable x.

Eine Variable x, die in φ in der Form $\forall x$ oder $\exists x$ vorkommt, heißt eine *gebundene Variable von* φ. Beispielsweise sind x, y, z die freien Variablen der Formel

$$\varphi \;=\; (\exists u.\ u = y \vee u = x) \wedge \forall x.\ x \in y \to x = z.$$

Die gebundenen Variablen dieser Formel sind u und x. x kommt also in φ sowohl frei als auch gebunden vor. Das erste Vorkommen von x in φ ist frei, das zweite Vorkommen von x in φ ist gebunden.

Definition *(Sätze/Aussagen)*

Eine Formel von $\mathscr{L}$ heißt eine *Aussage* oder ein *Satz* von $\mathscr{L}$, falls φ keine freien Variablen besitzt.

Definition *(Generalisierung und Allabschluss einer Formel)*

Sei φ eine Formel, und seien $x_1, \ldots, x_n$ Variablen (mit $n \geq 0$). Dann heißt $\forall x_1, \ldots, x_n\ \varphi$ *eine Generalisierung von* φ. Ist ψ eine Generalisierung von φ ohne freie Variablen, so heißt ψ *ein Allabschluss von* φ.

Der Fall $n = 0$ bedeutet, dass φ selbst als eine Generalisierung von φ gilt.

Definition *(die Schreibweise $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$)*

Seien φ eine Formel und $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Variablen. Wir schreiben $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, wenn die freien Variablen von φ unter $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen.

Schreiben wir $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, so folgt nicht, dass genau $x_1, \ldots, x_n$ die freien Variablen von φ sind. Z. B. können wir die Formel φ = „$\forall x\ x = y$" schreiben als $\varphi(x, y, z)$. Diese Konvention erweist sich als überaus bequem.

Substitutionen

Sei $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Formel, und seien $y_1, \ldots, y_n$ Variablen. Es gelte:

(+) Setzen wir an der Stelle eines freien Vorkommens einer Variablen x_i in φ die Variable y_i statt x_i ein, so ist y_i wieder frei in φ.

y_i gerät dann durch einen solchen lokalen Austausch nicht in den Wirkungsbereich eines Quantors $\exists y_i$ oder $\forall y_i$ von φ.

Ist (+) erfüllt, so sei

$$\varphi_{x_1, \ldots, x_n}(y_1, \ldots, y_n)$$

die Formel, die entsteht, wenn wir in der Formel φ die freien Vorkommen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ simultan durch $y_1, \ldots, y_n$ ersetzen.

Ist (+) nicht erfüllt, so sei $\varphi_{x_1, \ldots, x_n}(y_1, \ldots, y_n)$ gleich φ.

Zuweilen schreiben wir auch kurz einfach $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$.

Sei etwa

$$\varphi(x) \;=\; \exists z\ z = x \wedge \forall y\ y = y \wedge \forall x\ x = x.$$

Dann ist (+) für $\varphi(x)$, y erfüllt und es gilt

$$\varphi_x(y) \;=\; \exists z\ z = y \wedge \forall y\ y = y \wedge \forall x\ x = x.$$

Dagegen ist (+) für $\varphi(x)$, z nicht erfüllt. Formal ergäbe ein Einsetzen von z in φ für x die Aussage $\exists z\ z = z \wedge \forall y\ y = y \wedge \forall x\ x = x$. Solche Variablenkollisionen durch Substitution vermeiden wir mit der Bedingung (+).

Mengentheoretische Eigenschaften

Wir können nun den im Aussonderungs- und Ersetzungsschema verwendeten Eigenschaftsbegriff festlegen, indem wir ihn einfach mit dem Formelbegriff identifizieren.

Definition *(mengentheoretische Eigenschaften und Aussagen)*

Eine *Eigenschaft* (der Mengenlehre) ist eine Formel von $\mathscr{L}$. Eine *Aussage* (der Mengenlehre) ist ein Satz von $\mathscr{L}$.

Eine Eigenschaft ist also einfach ein aus den Grundrelationen „$x = y$" und „$x \in y$" mit Hilfe der Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und der Quantoren $\forall$ und $\exists$ aufgebauter Ausdruck. Und eine Aussage ist ein solcher Ausdruck, der keine freien Variablen enthält. Alle Sätze der beiden ersten Abschnitte ließen sich im Prinzip – bei geeigneter Definition von $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, usw. – als Aussagen von $\mathscr{L}$ schreiben. Allerdings würden sie dadurch unlesbar.

Axiomensysteme

Definition *(Axiomensystem)*

Ein *Axiomensystem* von $\mathscr{L}$ ist eine endliche oder unendliche Liste $\Sigma = \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ von Formeln von $\mathscr{L}$.

Implizit in dieser Festsetzung ist, dass ein Axiomensystem stets *rekursiv* ist, d. h. wir können von einer gegebenen Formel effektiv entscheiden, ob sie zum System gehört oder nicht.

Formale Beweise

Wir begnügen uns an dieser Stelle mit einer intuitiven und etwas vereinfachenden Beschreibung von formalen Beweisen. Der interessierte Leser findet am Ende dieses Kapitels eine detaillierte Beschreibung eines formalen Beweissystems, des sog. Hilbert-Kalküls.

Sei Σ ein Axiomensystem von $\mathscr{L}$. Ein *formaler Beweis* Δ *aus* Σ ist eine Liste

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \ldots,\ \psi_m;\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$$

von Formeln von $\mathscr{L}$, die nach bestimmten Regeln gebildet ist. $\psi_0, \ldots, \psi_m$ sind dabei Axiome aus Σ. Intuition ist: Die Formelliste Δ ist ein Beweis von φ_n mit Hilfe der Axiome $\psi_0, \ldots, \psi_m$. Die eigentliche Ableitung ist $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$. Hierbei entsteht ein φ_k durch Anwendung einer *Regel des Kalküls* auf Elemente von $\psi_0, \ldots, \psi_m, \varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$.

Beispiele für Regeln sind:

(R1) Aus φ und ψ bilde $\varphi \wedge \psi$ *(Und-Einführung)*,

(R2) Aus $\varphi \to \psi$ und φ bilde ψ *(Modus Ponens)*.

Seien φ, ψ, χ drei beliebige Sätze von $\mathscr{L}$. Wir betrachten als Beispiel das Axiomensystem

$$\Sigma \;=\; \varphi,\ \psi,\ \varphi \wedge \psi \to \chi.$$

Wir können nun die Aussage χ aus Σ formal beweisen, denn

$$\Delta \;=\; \underset{①}{\varphi},\ \ \underset{②}{\psi},\ \ \underset{③}{\varphi \wedge \psi \to \chi};\ \ \underset{④}{\varphi \wedge \psi},\ \ \underset{⑤}{\chi}.$$

ist ein Beweis von χ mit Hilfe der Axiome aus Σ: Die ersten drei Elemente ①, ②, ③ von Δ sind Axiome. ④ entsteht durch Anwendung von (R1) auf ① und ②. ⑤, die durch Δ bewiesene Aussage, entsteht durch Anwendung von (R2) auf ③ und ④.

Im Prinzip ließe sich jeder umgangssprachlich bewiesene Satz der Mengenlehre in einer solchen Weise herleiten. Obwohl formale Beweise nur für sehr einfache Sätze der Mengenlehre oder allgemein der Mathematik direkt durchgeführt worden sind, ist man von der prinzipiellen Möglichkeit überzeugt, jeden in üblicher Weise bewiesenen Satz der Mathematik in einen formalen Beweis umwandeln zu können. Die Situation ist ähnlich zur prinzipiellen Auflösbarkeit einer Eigenschaft in ihre Bestandteile, ihre Umwandlung in eine Formel von $\mathscr{L}$: Schreiben wir einen üblichen, umgangssprachlichen mathematischen Beweis immer ausführlicher auf, so nähert sich seine Gestalt einem formalen Beweis. Umgangssprachliche Beweise von wenigen Zeilen können dann Hunderte von Regelanwendungen erforderlich machen – so wie die Auflösung von „R ist eine Relation“ schon eine relativ lange Formel ergibt.

Die ZFC-Axiome in der formalen Sprache

Wir formulieren nun das Axiomensystem ZFC in der Sprache der Mengenlehre. Vorab noch einige Bemerkungen zur Notation.

Hier und im Folgenden sollen verschieden bezeichnete Variablen auch verschieden sein. So gilt dann z. B. für $\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$ immer $x \neq y$ im Sinne verschiedener Variablen.

Der Quantor $\exists!$ bedeutet „es gibt genau ein“ und ist für jede Formel φ definiert durch

$$\exists!\, x\, \varphi \;=\; \exists y\, \forall x.\ \varphi \leftrightarrow x = y,$$

wobei y eine Variable ist, die in φ nicht vorkommt.

(EXT) Extensionalitätsaxiom

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

$$\forall x,y.\ x = y \ \leftrightarrow\ \forall z.\ z \in x \ \leftrightarrow\ z \in y$$

(LM) Existenz der leeren Menge

$$\exists x\, \forall y\, y \notin x$$

(PA) Paarmengenaxiom

Zu je zwei Mengen x, y existiert eine Menge z, die genau x und y als Elemente hat.

$$\forall x,y\, \exists z\, \forall u.\ u \in z \ \leftrightarrow\ u = x \vee u = y$$

(VER) Vereinigungsmengenaxiom

Zu jeder Menge x existiert eine Menge y,
deren Elemente genau die Elemente der Elemente von x sind.

$$\forall x\, \exists y\, \forall z.\ z \in y \ \leftrightarrow\ \exists u.\ u \in x \wedge z \in u$$

(POT) Potenzmengenaxiom

Zu jeder Menge x existiert eine Menge y,
die genau die Teilmengen von x als Elemente besitzt.

$$\forall x\, \exists y\, \forall z.\ z \in y \ \leftrightarrow\ \forall u.\ u \in z \to u \in x$$

(AUS) Aussonderungsschema

Zu jeder Eigenschaft φ und jeder Menge x gibt es eine Menge y,
die genau die Elemente von x enthält, auf die φ zutrifft.

$$\forall x, p_1, \ldots, p_n\, \exists y\, \forall u.\ u \in y \ \leftrightarrow\ u \in x \wedge \varphi(u, p_1, \ldots, p_n)$$

(ERS) Ersetzungsschema

Das Bild einer Menge unter einer Funktion φ ist eine Menge.

$$\forall p_1, \ldots, p_n\, .\ \forall u\, \exists\, !\, v\ \varphi(u, v, p_1, \ldots, p_n) \ \to$$
$$\forall x\, \exists y\, \forall v.\ v \in y \ \leftrightarrow\ \exists u.\ u \in x \wedge \varphi(u, v, p_1, \ldots, p_n)$$

(UN) Unendlichkeitsaxiom

Es existiert eine Menge x, die die leere Menge als Element enthält
und die mit jedem ihrer Elemente y auch $\{ y \}$ als Element enthält.

$$\exists x.\ (\exists y.\ y \in x \wedge \forall z\, z \notin y) \ \wedge\ \forall y.\ y \in x \to \exists z.\ z \in x \wedge \forall u.\ u \in z \leftrightarrow u = y$$

(FUN) Fundierungsaxiom

Jede nichtleere Menge x hat ein Element y, das mit x kein Element gemeinsam hat.

$$\forall x.\ \exists y\, y \in x \to \exists y.\ y \in x \land \forall z.\ z \in y \to z \notin x$$

(AC) Auswahlaxiom

Ist x eine Menge, deren Elemente nichtleer und paarweise disjunkt sind,
so existiert eine Menge y,
die mit jedem Element von x genau ein Element gemeinsam hat.

$$\forall x.\ (\forall y\ (y \in x \to \exists z\ z \in y) \land \forall y, z.\ y \in x \land z \in x \land y \neq z \to \forall u.\ u \in y \to u \notin z)$$
$$\to\ \exists y\ \forall z.\ z \in x \to \exists!\, u.\ u \in y \land u \in z$$

Das Axiomensystem von $\mathscr{L}$ bestehend aus den unendlich vielen angegebenen Aussagen von $\mathscr{L}$ bezeichnen wir wie das umgangssprachliche System ebenfalls mit ZFC.

Formale Beweise im Hilbert-Kalkül

Wir besprechen nun ausführlicher einen formalen Beweisbegriff für die Sprache $\mathscr{L}$ der Mengenlehre. Damit wird die Formalisierung – oder genauer: die prinzipielle Möglichkeit der Formalisierung – der Mengenlehre vollständig.

Ansätze zu formalen Beweissystemen finden sich in der Syllogistik des Aristoteles. Die Logik blieb dann auch viele Jahrhunderte unter dem Dach der Philosophie hängen, bis sie von der Mathematik als Objekt der Begierde erkannt wurde und in Folge dann endlich den Auszug aus dem Elternhaus hinter sich brachte. Den wichtigsten Fortschritt nach Aristoteles bildeten die Arbeiten von Gottlob Frege (1848 – 1925), und in den Jahrzehnten nach 1900 wurden dann die ersten brauchbaren mathematischen Logikkalküle entwickelt. Prominent sind heute der (Frege-) Hilbert-Kalkül und der Kalkül des natürlichen Schließens von Gerhard Gentzen. Wir verwenden hier den Hilbert-Kalkül, der sich einfach definieren lässt, und der darüber hinaus zur Gewinnung von Resultaten der mathematischen Logik überaus gut zu handhaben ist.

Für das formale Beweisen selbst ist der Kalkül des natürlichen Schließens angenehmer, insbesondere in seiner zweidimensionalen Form, bei der Beweise in Form von Bäumen notiert werden. Der Leser konsultiere Lehrbücher zur mathematischen Logik für die Feinheiten der verschiedenen Kalküle. Die verschiedenen Kalküle sind aber allesamt logisch äquivalent, d. h. sie beweisen dieselben Aussagen. Die Beweise der Kalküle lassen sich darüber hinaus effektiv ineinander übersetzen.

Der Hilbert-Kalkül für $\mathscr{L}$ ist ein syntaktisches System auf der Metaebene. Es beschreibt, welche endlichen Folgen von Formeln einen formalen Beweis bilden. Ein formaler Beweis beweist dann immer seine letzte Formel.

Der Hilbert-Kalkül hat zwei Bestandteile: die logischen Axiome und die Schlussregel Modus Ponens. Die logischen Axiome zerfallen in aussagenlogische Axiome, Identitätsaxiome und Quantoraxiome.

Die logischen Axiome des Hilbert-Kalküls

Wir zeichnen bestimmte Formeln von $\mathcal{L}$ als logische Grundaxiome aus. Man kann diese Formeln als stillschweigende Axiome ansehen, die jedes Axiomensystem schon mitbringt. Sie liefern keinen mathematischen Inhalt, sondern verbinden die logischen Zeichen miteinander, getreu der intendierten Semantik.

Im Hilbert-Kalkül tauchen wegen des ständigen Einsatzes der Modus-Ponens-Schlussregel (s. u.) sehr häufig Implikationsketten auf. Wir vereinbaren hier Rechtsklammerung, um Klammern zu sparen:

$\varphi \to \psi \to \chi$ ist $\varphi \to (\psi \to \chi)$,

$\varphi \to \psi \to \chi \to \xi$ ist $\varphi \to (\psi \to (\chi \to \xi))$, usw.

Hilfreich für das Lesen solcher Ketten ist die semantische Äquivalenz von „aus φ folgt: aus ψ folgt χ“ mit „aus φ und ψ folgt χ“. Allgemein ist „φ_1 folgt φ_2 folgt … folgt φ_n folgt φ_{n+1}“ mit Rechtsklammerung äquivalent zu „aus φ_1 und … und φ_n folgt φ_{n+1}“, wobei hier die φ_i beliebige umgangssprachliche mathematische Aussagen sein sollen. Mit dieser Lesart wird etwa (i) und (ii) in der folgenden Definition sofort einsichtig.

Definition *(aussagenlogische Axiome)*

Eine Formel von $\mathcal{L}$ heißt ein *aussagenlogisches Axiom* von $\mathcal{L}$, wenn sie von einer der folgenden Formen ist:

(i) $\varphi \to \psi \to \varphi$,

(ii) $(\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \chi$,

(iii) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$,

(iv) $\varphi \wedge \psi \to \psi$,

(v) $\varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$,

(vi) $\varphi \to \varphi \vee \psi$,

(vii) $\varphi \to \psi \vee \varphi$,

(viii) $(\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi) \to \varphi \vee \psi \to \chi$,

(ix) $(\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)$,

(x) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,

(xi) $\varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$,

(xii) $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

Man erhält insgesamt einen logisch äquivalenten Kalkül, wenn man hier liberaler jede aussagenlogische Tautologie als Axiom zulässt. Eine aussagenlogische Tautologie ist dabei eine Formel von $\mathscr{L}$, die, quantorfrei notiert, durch das bekannte Wahrheitstafelverfahren für lange Winterabende als wahr in jedem Falle nachgewiesen werden kann. Wir können zum Beispiel $\forall x\,\varphi \to \forall x\,\varphi \lor \exists y\,\varphi$ in der quantorfreien Form $\psi \to \psi \lor \chi$ notieren, und alle vier Kombinationen von Wahrheitswerten w (für wahr) oder f (für falsch) für ψ und χ durchspielen, um zu sehen, dass die Auswertung von $\lor$ und $\to$ mit der üblichen Semantik am Ende in allen vier Fällen w ergibt. Es gilt etwa $\mathrm{f} \lor \mathrm{f} = \mathrm{f}$, $\mathrm{f} \to \mathrm{f} = \mathrm{w}$, also $\mathrm{f} \to (\mathrm{f} \lor \mathrm{f}) = \mathrm{f} \to \mathrm{f} = \mathrm{w}$, ebenso für die anderen drei Fälle. Allgemeiner hat man 2^n-viele Kombinationen zu überprüfen, wenn eine quantorfreie Formel aus $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ zusammengesetzt ist.

Obige Liste von Schemata ist aber übersichtlicher und interessanter als ein allgemeines Tautologie-Schema (alle Axiome der Liste sind Tautologien). Mit ihrer Hilfe kann man zudem sehr leicht sinnvolle restriktive Logiken genau definieren: Der einzige Stein, an dem sich die konstruktive Mathematik im ganzen Hilbert-Park das Knie schlägt, ist das Axiom (xii). Dieses *Stabilitäts-* oder *reductio ad absurdum*-Schema $\neg\neg\varphi \to \varphi$ macht die Logik zur klassischen Logik. Lässt man (xii) weg, so erhält man den Hilbert-Kalkül für die – für den klassisch geschulten Geist nicht unbedingt intuitive – *intuitionistische Logik* (befürwortet vor allem von Brouwer, und formalisiert von Heyting (1930); vgl. auch [Kolmogorov 1925]). Intuitionistisch ist dagegen spaßigerweise immer noch $\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ beweisbar, von drei Negationen kann man also zwei fallen lassen.

Gleichwertig zu (xii) über den anderen logischen Axiomen ist das *tertium non datur*-Schema $\varphi \lor \neg\varphi$, das die konstruktive Mathematik ebenso scheut wie das Wegstreichen einer doppelten Negation.

Die sog. Brouwer-Heyting-Kolmogorov Interpretation klärt, was die intuitionistische Logik will: Unter dieser (informalen) Interpretation gilt: Ein Beweis von $\varphi \land \psi$ liegt genau dann vor, wenn ein Beweis von φ und ein Beweis von ψ vorliegt. (Das gilt klassisch genauso.) Ein Beweis von $\varphi \lor \psi$ liegt genau dann vor, wenn ein Beweis von φ oder ein Beweis von ψ vorliegt. (Das gilt klassisch nicht: klassisch ist z. B. $\varphi \lor \neg\varphi$ für jede Aussage φ beweisbar, während für jede offene Frage oder jede unabhängige Aussage φ weder ein Beweis von φ noch ein Beweis von $\neg\varphi$ vorliegt.) Weiter liegt ein Beweis von $\varphi \to \psi$ genau dann vor, wenn es ein Verfahren gibt, das einen beliebigen Beweis von φ in einen Beweis von ψ transformiert. Und schließlich liegt ein Beweis von $\neg\varphi$ genau dann vor, wenn es ein Verfahren gibt, das einen Beweis von φ in einen Beweis einer Formel verwandeln würde, deren Nichtbeweisbarkeit man akzeptiert. (Dies gilt klassisch ebenfalls nicht. Das Schema (xii) $\neg\neg\varphi \to \varphi$ ist gerade etwas, was man mit einer reinen Beweistransformation nicht begründen kann, im Gegensatz zu $\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ oder auch $\varphi \to \neg\neg\varphi$.)

$\neg\neg\varphi \to \varphi$ wird in der Mathematik durchgehend verwendet, und die Art und Weise der Verwendung erklärt den Namen *reductio ad absurdum:* Man will φ zeigen. Hierzu macht man die Annahme non(φ), und zeigt, dass aus dieser Annahme Unfug wie „0 = 1" hergeleitet werden kann. Dann hat man gezeigt, dass non(φ) nicht gelten kann, d. h. man hat durch das Argument non(non(φ)) gezeigt. Bis hierhin spielt der Konstruktivist mit (bei konstruktiver Argumentation), nicht aber bei dem letzten Schluss von non(non(φ)) auf φ. Man muss den Konstruktivisten rechtgeben, dass ein ständiges „Annahme non(φ)“ zur Manie werden kann, und häufig auch dort eingesetzt wird, wo es nicht nötig ist. Ob das schlimm ist, ist die andere Frage.

Verwandt zu *reductio ad absurdum* ist das *Kontrapositionsgesetz* oder das Schema des *indirekten Beweisens* $\varphi \to \psi \leftrightarrow \neg\,\psi \to \neg\,\varphi$. Intuitionistisch gilt

$$(\varphi \to \psi) \to \neg\,\psi \to \neg\,\varphi,$$

im Allgemeinen aber nicht die Umkehrung, die für das indirekte Beweisen gebraucht wird.

Ein noch restriktiveres System ist die *Minimallogik* [Johansson 1937]. Hier lässt man neben (xii) auch noch das *ex contradictio quodlibet*-Schema

$$\text{(xi)}\ \varphi \wedge \neg\,\varphi \to \psi$$

weg. Zudem streicht man das Negationszeichen $\neg$ aus der Sprache, führt einen 0-stelligen logischen Junktor $\perp$, *falsum* genannt, ein, und definiert dann $\neg\,\varphi$ als die Formel $\varphi \to \perp$. Das Zeichen $\perp$ selbst gilt als Primformel. Dieses Vorgehen ist auch im Intuitionismus üblich, und $\neg\,\varphi$ als $\varphi \to \perp$ zu lesen deckt sich mit der obigen Interpretation, sobald $\perp$ als eine Formel ohne Beweis angesehen wird. Klassisch kann man den unbestreitbaren formalen Komfort eines Falsums erreichen, indem man $\perp$ als Abkürzung für $\psi \wedge \neg\,\psi$ einführt, mit einem beliebigen ψ. Damit ist die nützliche Äquivalenz $\neg\,\varphi \leftrightarrow \varphi \to \perp$ für alle φ formal beweisbar.

In grober Analogie: Die klassische Logik verhält sich zur intuitionistischen Logik so wie ZFC zu ZF. Und so wie ZF eine interessante Teiltheorie von ZFC ist, ist eine Logik ohne Stabilität zwar etwas wackelig, aber nicht uninteressant.

Definition *(Identitätsaxiome)*

Eine Formel von $\mathcal{L}$ heißt ein *Identitätsaxiom* von $\mathcal{L}$, wenn sie von einer der folgenden Formen ist:

(i) $x = x$,

(ii) $x = y \to \varphi_z(x) \to \varphi_z(y)$, wobei φ eine Primformel ist.

Definition *(Quantoraxiome)*

Eine Formel von $\mathcal{L}$ heißt ein *Quantoraxiom* von $\mathcal{L}$, wenn sie von einer der folgenden Formen ist:

(i) $\varphi \to \forall x\, \varphi$, wobei x nicht frei in φ vorkommt,

(ii) $\forall x(\varphi \to \psi) \to \forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi$,

(iii) $\forall x\, \varphi \to \varphi_x(y)$,

(iv) $\varphi_x(y) \to \exists x\, \varphi$,

(v) $\forall x(\varphi \to \psi) \to \exists x\, \varphi \to \psi$, wobei x nicht frei in ψ vorkommt.

Die an dieser Stelle etwas seltsame Variablenbedingung im ersten Schema wird unten klar werden. Semantisch sind die fünf Schemata sicher korrekt.

Definition *(logische Axiome des Hilbert-Kalküls für $\mathcal{L}$)*

Eine Formel φ von $\mathcal{L}$ heißt ein *logisches Axiom* von $\mathcal{L}$, falls φ eine Generalisierung eines aussagenlogischen Axioms, eines Identitätsaxioms oder eines Quantoraxioms ist.

Ist also φ ein logisches Axiom, so ist $\forall x\, \varphi$ ein logisches Axiom für alle Variablen x. Eine Formel φ gilt als Generalisierung von φ, und damit sind alle aufgelisteten Axiome auch logische Axiome. Die Motivation für die technische Variablenbehandlung in der Definition der logischen Axiome wird aus dem Beweis der Generalisierungsregel hervorgehen (s. u.).

Die Schlussregel des Hilbert-Kalküls

Im Hilbert-Kalkül gibt es nur eine Schlussregel, den Modus Ponens:

Definition *(Modus Ponens)*

Seien φ, ψ, χ Formeln von $\mathcal{L}$. χ *entsteht aus* φ, ψ *durch Anwendung der Regel Modus Ponens*, falls ψ von der Form $\varphi \to \chi$ ist.

Die Idee ist: Haben wir φ und $\varphi \to \chi$ bewiesen, so können wir auf χ schließen. Und diesen Schluss nennen wir Modus Ponens.

Formale Beweise im Hilbert-Kalkül

Definition *(formale Beweise im Hilbert-Kalkül für die Sprache der Mengenlehre)*

Sei Σ ein Axiomensystem von $\mathcal{L}$. Weiter sei $\Delta = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Formeln. Δ heißt *ein (formaler) Beweis aus* Σ oder *eine Herleitung aus* Σ, falls für alle $1 \leq i \leq n$ gilt:

(i) φ_i ist ein logisches Axiom *oder*

(ii) $\varphi_i \in \Sigma$ *oder*

(iii) es existieren $1 \leq k, \ell < i$ derart, dass φ_i aus φ_k, φ_ℓ durch Anwendung von Modus Ponens entsteht.

Beim Beweisen darf man also die logischen Axiome und die Axiome der gewählten untersuchten Axiomatik Σ frei einsetzen. Alles andere ist ein Übergang von zwei bereits bewiesenen Formeln der Form φ und $\varphi \to \chi$ auf die Formel χ mit Hilfe der einzigen Schlussregel des Kalküls. Es ist bemerkenswert, dass sich das Beweisen so einfach und übersichtlich formal fassen lässt.

Definition *(Beweisbarkeit einer Formel, Länge eines Beweises)*

Sei Σ ein Axiomensystem von $\mathscr{L}$, und sei φ eine Formel von $\mathscr{L}$. φ heißt *(formal) beweisbar aus* Σ oder *herleitbar aus* Σ, in Zeichen $\Sigma \vdash \varphi$ [gelesen: Σ beweist φ], falls gilt:

Es existiert ein Beweis $\Delta = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aus Σ mit $\varphi = \varphi_n$.

Δ heißt dann *ein Beweis von* φ *aus* Σ *der Länge n.*

Wir schreiben $\vdash \varphi$, falls ein leeres Axiomensystem φ beweist, d. h. falls ein Beweis von φ existiert, der nur (i) und (iii) verwendet. Gilt $\vdash \varphi$, so nennen wir φ *(logisch) beweisbar.*

Analog sind $\Sigma, \Sigma' \vdash \varphi$ sowie $\Sigma, \psi \vdash \varphi$ definiert für Axiomensysteme Σ, Σ' und Formeln ψ. $\Sigma, \Sigma' \vdash \varphi$ heißt, dass in einem Beweis von φ Axiome aus Σ und Σ' verwendet werden dürfen. $\Sigma, \psi \vdash \varphi$ heißt, dass in einem Beweis von φ neben Axiomen aus Σ auch die Formel ψ als Axiom verwendet werden darf.

Es gilt $\Sigma \vdash \varphi$ (in einem Schritt) für alle $\varphi \in \Sigma$ und $\varphi \vdash \varphi$ für alle Formeln φ.

Durchgehend verwendet werden die folgenden Beobachtungen einfacher Natur:

Übung

Für alle Axiomensysteme Σ und alle Formeln φ gilt:

(i) Ist $\Delta = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein Beweis aus Σ, so gilt

$\Sigma \vdash \varphi_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(ii) Gilt $\Sigma \vdash \varphi$, so existieren Axiome $\psi_1, \ldots, \psi_n$ aus Σ mit

$\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$.

Anfangsstücke von Beweisen sind Beweise. Und formale Beweise sind immer finit: Obwohl ein Axiomensystem aus unendlich vielen Formeln bestehen kann, werden in einem Beweis immer nur endlich viele Axiome verwendet.

In jedem Kalkül verwenden Beweise Grundannahmen, und ziehen Schlüsse aus diesen Annahmen. Die eigentliche Dynamik eines Beweises im Hilbert-Kalkül steckt im Modus Ponens. Wenn wir in nichttrivialer Weise χ beweisen wollen, müssen wir vorher irgendwann für ein φ die Formeln $\varphi \to \chi$ und φ bewiesen haben. Welches φ man hierbei anstrebt, ist die Kunst. Das gleiche gilt nun aber für φ: φ ist entweder ein Axiom, oder entstanden aus $\psi \to \varphi$ und ψ. Ähnliches gilt für ψ. Trivial oder Modus Ponens. Tertium non datur.

Das tatsächliche formale Beweisen im Hilbert-Kalkül ist qualvoll. Dante hätte es in seiner Göttlichen Komödie gut verwenden können. Wer während seines Lebens etwas gegen die Logik gesagt hat, muss in der Hölle formale Beweise im Hilbert-Kalkül führen. Auf Erden verschafft der folgende Satz aus der logischen Apotheke Linderung:

Satz *(Deduktionstheorem)*

Seien Σ ein Axiomensystem und ψ, φ Formeln von $\mathscr{L}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\Sigma, \psi \vdash \varphi$,

(ii) $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$.

Beweis

(i) ↷ (ii): Wir zeigen die Aussage durch metamathematische Induktion über die Länge $n \geq 1$ eines formalen Beweises Δ von φ aus Σ, ψ. Entscheidend hierbei sind die aussagenlogischen Axiome (i) und (ii).

Induktionsschritt n

Sei $\Delta = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ein Beweis von $\varphi_n = \varphi$ aus Σ, ψ.

1. Fall: φ ist ein logisches Axiom oder ein Axiom von Σ.

Dann ist $\varphi, \varphi \to \psi \to \varphi, \psi \to \varphi$ ein Beweis von $\psi \to \varphi$ aus Σ.

2. Fall: φ entsteht durch Anwendung von Modus Ponens.

Dann existieren $k, \ell < n$ mit $\varphi_\ell = \varphi_k \to \varphi$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren Beweise

(a) $\eta_1, \ldots, \eta_m$ von $\eta_m = \psi \to \varphi_\ell = \psi \to \varphi_k \to \varphi$ aus Σ,

(b) $\xi_1, \ldots, \xi_{m'}$ von $\xi_{m'} = \psi \to \varphi_k$ aus Σ.

Dann ist

$\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}, \psi \to \varphi_k \to \varphi, \xi_1, \ldots, \xi_{m'-1}, \psi \to \varphi_k,$
$(\psi \to \varphi_k \to \varphi) \to (\psi \to \varphi_k) \to \psi \to \varphi, (\psi \to \varphi_k) \to \psi \to \varphi, \psi \to \varphi$

ein Beweis von $\psi \to \varphi$ aus Σ.

(ii) ↷ (i): Sei $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ ein Beweis von $\varphi_n = \psi \to \varphi$ aus Σ. Dann ist

$\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \psi \to \varphi, \psi, \varphi$

ein Beweis von φ aus Σ, ψ.

Die absolutistische Existenz des Modus Ponens ist eine Besonderheit des Hilbert-Kalküls. Diese Regierungsform wird zwar von einer Unzahl logischer Axiome gestützt, aber ohne das Deduktionstheorem käme es sofort zur Revolution. Der Leser wird bei den Übungen unten sehen, wie nützlich das Deduktionstheorem tatsächlich ist.

Beispiel

Wir zeigen $\varphi \to \psi \to \chi \vdash \psi \to \varphi \to \chi$. Es gilt $\varphi \to \psi \to \chi \vdash \varphi \to \psi \to \chi$. Zweimalige Anwendung des Deduktionstheorems liefert, dass $\varphi \to \psi \to \chi, \varphi, \psi \vdash \chi$. Damit gilt auch $\varphi \to \psi \to \chi, \psi, \varphi \vdash \chi$. Eine erneute zweimalige Anwendung des Deduktionstheorems liefert nun $\varphi \to \psi \to \chi \vdash \psi \to \varphi \to \chi$.

Daneben ist der Satz von theoretischer Bedeutung. Hierzu betrachten wir noch eine Verallgemeinerung. Durch Induktion folgt aus dem Deduktionstheorem, dass für alle Axiomensysteme Σ und alle Formeln φ, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ gilt:

$$\Sigma, \psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi \quad \textit{gdw} \quad \Sigma \vdash \psi_1 \to \ldots \to \psi_n \to \varphi.$$

Es folgt, dass alles, was ein endliches Axiomensystem beweisen kann, sich im wesentlichen in der reinen Logik abspielt. Denn ist $\Sigma = \psi_1, \ldots, \psi_n$, so gilt für alle φ:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \textit{gdw} \quad \vdash \psi_1 \to \ldots \to \psi_n \to \varphi.$$

Ein zum Beweis des Deduktionstheorems analoges Argument liefert die folgende Generalisierungsregel:

Satz *(Generalisierungsregel)*

Sei Σ ein Axiomensystem von $\mathscr{L}$, und sei φ eine Formel von $\mathscr{L}$ mit $\Sigma \vdash \varphi$. Weiter sei x eine Variable, die in keiner Formel von Σ frei vorkommt. Dann gilt $\Sigma \vdash \forall x\, \varphi$.

Beweis

Wir zeigen die Aussage durch metamathematische Induktion über die Länge $n \geq 1$ eines formalen Beweises Δ von φ aus Σ. Entscheidend hierbei sind die Quantoraxiome (i) und (ii).

Induktionsschritt n

Sei $\Delta = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ein Beweis von $\varphi_n = \varphi$ aus Σ.

1. Fall: φ ist ein logisches Axiom oder ein Element von Σ.

Dann ist $\varphi,\ \varphi \to \forall x\, \varphi,\ \forall x\, \varphi$ ein Beweis von $\forall x\, \varphi$ aus Σ, denn nach Voraussetzung ist x nicht frei in φ_n.

2. Fall: φ entsteht durch Anwendung von Modus Ponens.

Dann existieren $k, \ell < n$ mit $\varphi_\ell = \varphi_k \to \varphi$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren Beweise

(a) $\eta_1, \ldots, \eta_m$ von $\eta_m = \forall x\, \varphi_\ell = \forall x.\, \varphi_k \to \varphi$ aus Σ,

(b) $\xi_1, \ldots, \xi_{m'}$ von $\xi_{m'} = \forall x\, \varphi_k$ aus Σ.

Dann ist

$$\eta_1,\ \ldots,\ \eta_{m-1},\ \forall x.\, \varphi_k \to \varphi,\ \xi_1, \ldots, \xi_{m'-1},\ \forall x\, \varphi_k,$$
$$(\forall x.\, \varphi_k \to \varphi) \to \forall x\, \varphi_k \to \forall x\, \varphi,\ \forall x\, \varphi_k \to \forall x\, \varphi,\ \forall x\, \varphi$$

ein Beweis von $\forall x\, \varphi$ aus Σ.

Die Generalisierungsregel entspricht der Anschauung: Hat man $\varphi(x)$ bewiesen und über x nichts vorausgesetzt (vgl. „Sei x beliebig.“), so hat man $\varphi(x)$ für alle x bewiesen.

Besteht ein Axiomensystem Σ, wie etwa ZFC, nur aus Aussagen, so beweist Σ eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ genau dann, wenn Σ die Aussage $\forall x_1, \ldots, x_n\, \varphi$ beweist. (Die Richtung von rechts nach links erhält man durch iterierte Anwendung des Quantoraxioms $\forall x\, \psi \to \psi_x(y)$ und Modus Ponens.)

In manchen Formulierungen des Hilbert-Kalküls wird eine Generalisierungsregel als zweite Schlussregel neben dem Modus Ponens verwendet: Von φ darf man immer auf die Formel $\forall x\, \varphi$ schließen, wenn x nicht frei in φ vorkommt. Ein Axiomensystem Σ muss dann ausschließlich aus Aussagen bestehen, was keine wesentliche Einschränkung ist. Eine einzige Schlussregel zu haben wird aber dem Hilbert-Kalkül als Staatsform sicher gerechter und vereinfacht seine metatheoretische Untersuchung.

Übung

Für alle Formeln φ, ψ, χ, alle Variablen x und alle Axiomensysteme Σ gilt:

(i) $\vdash \varphi \to \psi \to \chi \;\leftrightarrow\; \varphi \wedge \psi \to \chi$,

(ii) $\vdash \neg\,\varphi \leftrightarrow \varphi \;\to\; \psi \wedge \neg\,\psi$,

(iii) $\vdash \varphi \vee \neg\,\varphi$,

(iv) $\Sigma, \varphi \vdash \psi$ und $\Sigma, \neg\,\varphi \vdash \psi$ *folgt* $\Sigma \vdash \psi$,

(v) $\vdash (\varphi \to \neg\,\varphi) \to \neg\,\varphi$,

(vi) $\vdash (\varphi \vee \psi) \to \neg\,\psi \to \varphi$,

(vii) $\vdash \varphi \to \psi \;\leftrightarrow\; \neg\,\varphi \vee \psi$,

(viii) $\vdash \varphi \to \psi \;\leftrightarrow\; \neg\,\psi \to \neg\,\varphi$,

(ix) $\vdash \varphi \vee \psi \;\leftrightarrow\; \neg\,(\neg\,\varphi \wedge \neg\,\psi)$,

(x) $\vdash \forall x\, \varphi \;\leftrightarrow\; \neg\,\exists x\, \neg\,\varphi$.

(xi) $\vdash \exists x\, \varphi \;\leftrightarrow\; \neg\,\forall x\, \neg\,\varphi$.

Es ist instruktiv zu verfolgen, für welche formale Beweise hierbei (und für welche Richtungen von $\leftrightarrow$) das Schema $\neg\neg\,\varphi \to \varphi$ verwendet wird.

Widerspruchsfreiheit

Definition *(Widerspruchsfreiheit)*

Sei Σ ein Axiomensystem von $\mathcal{L}$. Σ heißt *widerspruchsfrei* oder *konsistent*, falls es eine Formel φ gibt mit non($\Sigma \vdash \varphi$).

Nach der Übung oben gilt: Σ ist widerspruchsfrei *gdw* jeder endliche Teil Σ' von Σ ist widerspruchsfrei.

Wir halten eine fundamentale Äquivalenz fest.

Satz *(widerspruchsfreie Erweiterungen)*

Seien Σ ein Axiomensystem und φ eine Formel von $\mathcal{L}$. Dann sind äquivalent:

(i) Σ erweitert um das Axiom φ ist widerspruchsfrei.

(ii) $\mathrm{non}(\Sigma \vdash \neg\, \varphi)$.

Beweis

(i) ↷ (ii): Sei ψ eine Formel mit $\mathrm{non}(\Sigma, \varphi \vdash \psi)$. *Annahme*, es gilt $\Sigma \vdash \neg\, \varphi$. Sei dann $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \neg\, \varphi$ ein Beweis von $\neg\, \varphi$ aus Σ. Dann ist

$$\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},\ \neg\, \varphi,\ \varphi,\ \neg\, \varphi \to \varphi \to \psi,\ \varphi \to \psi,\ \psi,$$

ein Beweis von ψ aus Σ, φ, wobei wir die beweisbare Formel $\neg\, \varphi \to \varphi \to \psi$ verwenden. Dies ist ein *Widerspruch* zur Wahl von ψ.

(ii) ↷ (i): Wir zeigen non(i) ↷ non(ii). Sei also Σ erweitert um φ widerspruchsvoll. Dann gilt $\Sigma, \varphi \vdash \neg\, \varphi$. Nach dem Deduktionstheorem gilt also $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\, \varphi$. Aber $(\varphi \to \neg\, \varphi) \to \neg\, \varphi$ ist beweisbar. Modus Ponens liefert dann $\Sigma \vdash \neg\, \varphi$, also non(ii).

Aus $\mathrm{non}(\Sigma \vdash \varphi)$ kann i.a. nicht auf $\Sigma \vdash \neg\, \varphi$ geschlossen werden. Die Existenz unabhängiger Aussagen macht diesen Schluss zunichte.

Definition *(unabhängig)*

Sei Σ ein Axiomensystem, und sei φ eine Formel von $\mathcal{L}$. φ heißt *unabhängig von* Σ, falls gilt:

$$\mathrm{non}\,(\Sigma \vdash \varphi) \ \text{ und } \ \mathrm{non}\,(\Sigma \vdash \neg\, \varphi).$$

Die Existenz einer von Σ unabhängigen Aussage impliziert offenbar die Widerspruchsfreiheit von Σ. Andererseits besagt der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz: Ist eine axiomatische Erweiterung Σ von ZFC widerspruchsfrei, so existieren immer von Σ unabhängige Aussagen. Also decken auch beliebig starke Erweiterungen von ZFC nie alles ab. Die unabhängigen Aussagen des Gödelresultats sagen etwa „ich bin nicht beweisbar in Σ". Dass solche Aussagen unabhängig sind, irritiert nicht unbedingt. Das wirklich Aufregende ist nun aber, dass wir über ZFC unabhängige Aussagen mit einem klaren mengentheoretischen Gehalt kennen:

Formale Form des Fundamentalsatzes der Mengenlehre

Ist ZFC widerspruchsfrei, so ist (CH) unabhängig von ZFC.

Dieser Satz ist (wie etwa das Deduktionstheorem) ein Metatheorem. Für den Beweis wird viel Mengenlehre verwendet, und keine Syntaxanalyse des Kalküls. Letztendlich liefert der Beweis des Fundamentalsatzes dann aber sogar ein Verfahren, das zeigt, wie wir einen Beweis von (CH) oder von $\neg$ (CH) in ZFC in einen Beweis eines Widerspruchs $\psi \wedge \neg\, \psi$ verwandeln können.

Übersetzung des formalen Rahmens in die Objektebene

Man kann mathematische Logik ganz allgemein in der Mengenlehre entwickeln, und $\mathscr{L}$ erscheint dann in der Objektebene als spezielle prädikatenlogische Sprache. Als Zeichen der Sprache wählt man geeignete Mengen, etwa $\wedge = 3$, $\forall = 7$, $v_0 = 0$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, usw. Formeln sind dann wieder bestimmte Folgen von Zeichen, und formale Beweise auf der Objektebene sind bestimmte endliche Folgen von Formeln. Der Transport von Begriffen und Resultaten funktioniert problemlos von der Metaebene in die Objektebene, und wird üblicherweise durch Klammern $\ulcorner$, $\urcorner$ bezeichnet. Etwa $\ulcorner \wedge \urcorner = 3$, $\ulcorner \forall\, v_2 \wedge \wedge \urcorner = (7, 4, 3, 3)$. Formale Beweise der wirklichen Welt übersetzen sich in formale Beweise im Mengenuniversum. ZFC wird zu einer Menge $\ulcorner$ZFC$\urcorner$ von Aussagen auf der Objektebene. Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$) ist die Aussage, das es keinen Beweis in $\ulcorner$ZFC$\urcorner$ von $\ulcorner \exists v_0\, v_0 \neq v_0 \urcorner$ gibt (hierbei steht „Con“ für engl. „consistent“).

Auf der Metaebene haben wir:

(i) Ist ZFC widerspruchsfrei, so gilt non(ZFC $\vdash$ CH).

(ii) Ist ZFC widerspruchsfrei, so gilt non(ZFC $\vdash \neg$ CH).

In die Objektebene übersetzt sich das etwa als:

(i) ZFC $\vdash$ Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$) $\to$ Con($\ulcorner$ZFC + $\neg$ CH$\urcorner$).

(ii) ZFC $\vdash$ Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$) $\to$ Con($\ulcorner$ZFC + CH$\urcorner$).

De facto lässt sich die Spiegelung der Metaebene in eine Objektebene in einer viel schwächeren Theorie ausführen, und man kann ZFC links von $\vdash$ in (i) und (ii) etwa durch die Peano-Dedekind-Arithmetik PA ersetzen, wobei dann nicht nur Zeichen, sondern auch z. B. Formeln und Beweise als Zahlen kodiert werden müssen. Die Arithmetik kann sehr gut darüber nachdenken, was die Mengenlehre $\ulcorner$ZFC$\urcorner$ beweisen kann.

Die Übersetzung von der Objektebene in die Metaebene ist wesentlich problematischer. Hierzu betrachten wir den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz für ZFC. Er lautet schlicht und ergreifend:

(+) Ist ZFC widerspruchsfrei, so gilt non(ZFC $\vdash$ Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$)).

Im Folgenden nehmen wir an, dass ZFC widerspruchsfrei ist. Dann ist nach (+) auch das schräge Axiomensystem ZFC* = ZFC + $\neg$ Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$) widerspruchsfrei. Es gilt:

ZFC* $\vdash$ $\ulcorner$es gibt einen Beweis b von $\ulcorner 0 = 1 \urcorner$ in $\ulcorner$ZFC$\urcorner\urcorner$.

Ein Beweis b von 0 = 1 in ZFC auf der Objektebene kann aber dann nicht in einen Beweis von 0 = 1 in ZFC auf der Metaebene übersetzt werden, d. h. es gibt keinen Beweis Δ mit $\ulcorner \Delta \urcorner$ = b. Andernfalls wäre ZFC widerspruchsvoll. Wie kann eine solche Übersetzung schiefgehen? Der Grund ist: b ist unendlich lang, die Objektebene eines ZFC*-Universums hat einen anderen Endlichkeitsbegriff als die Metaebene – und als das platonische Mengenuniversum V. „Das“ ω von ZFC*, ω^* genannt, ist länger als ein platonisches ω, obwohl die Theorie ZFC* felsenfest davon überzeugt ist, dass ω^* die erste Limesordinalzahl ist und genau die Menge der endlichen Ordinalzahlen darstellt.

Für den Platoniker ist Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$) äquivalent mit der Widerspruchsfreiheit von ZFC. Zudem beweisen große Kardinalzahlen die Aussage Con($\ulcorner$ZFC$\urcorner$). Axiomensysteme wie

ZFC* sind für den Platoniker lediglich ein weiteres Beispiel dafür, dass es wahre Aussagen gibt, die sich nicht in einer begrenzten Theorie wie ZFC beweisen lassen.

Man kann den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz in die Objektebene übersetzen und erhält dann:

(+) $\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner) \rightarrow \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} + \neg\, \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner) \urcorner)$.

Das ist interessant, aber unbedenklich. Sehr bedenklich wäre dagegen:

(–) ZFC ist widerspruchsfrei, aber $\mathrm{ZFC} \vdash \neg\, \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner)$.

Dieses metamathematische Kuriosum kann niemand als Nonsens entlarven, der ganz in ZFC verbleibt.

Der Platonist sagt: „Man lasse sich durch diese logischen Tricks im Umfeld der Gödelresultate nicht verwirren, sondern eher in seiner platonischen Haltung bestärken. ZFC ist eine hübsche Sammlung von wahren Aussagen über das Universum V, die Sätze von ZFC erfassen aber nicht alle wahren Aussagen. Z. B. ist $\mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner)$ eine wahre Aussage, die nicht in ZFC beweisbar ist.“ Für den Erzplatonisten ist (CH) viel beunruhigender als ZFC*-Spielereien: Er weiß nicht, ob (CH) in V gilt oder nicht. Er sucht nach mehr Wissen über Mengen, um irgendwann zu sehen, ob (CH) wahr ist oder falsch. ZFC gilt ihm als ein guter Anfang, aber sicher nicht als das letzte Wort.

Es gibt viele andere Dinge, die ZFC nicht beweisen kann, die ein Platoniker aber fast für selbstverständlich hält. Nach dem Gödelschen Vollständigkeitssatz gilt:

$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner) \leftrightarrow \exists M\, M \models \ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner$.

Nach dem zweiten Unvollständigkeitssatz kann also ein widerspruchsfreies ZFC nicht zeigen, dass es ein Modell von $\ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner$ gibt.

Der formalistische Standpunkt

Ein Gegenentwurf zum Platonismus ist die formalistische Haltung, die ihre Sicht der Mathematik aus der Möglichkeit eines finiten formalen Rahmens für die mathematische Tätigkeit gewinnt. Seine radikalste Form ist: Es gibt die mathematischen Objekte nicht wirklich, es gibt nur Zeichenketten auf dem Papier, und diese Zeichenketten werden nach festen Regeln manipuliert. Aus Axiomen – bestimmten ausgezeichneten Zeichenketten – gewinnt man durch diese Manipulationen mathematische Sätze.

Der Formalismus hat den Vorteil großer Klarheit. Er scheut die metaphysischen Grundannahmen des Platonismus wie der Teufel das Weihwasser, und gibt eine präzise Anwort auf die Frage, was Mathematik ist.

Die in diesem Buch eingenommene Haltung tendiert stark zum platonischen Entwurf. Die formale Welt ist uns ein willkommener, das Gebäude tragender Keller, der insbesondere metamathematische Aussagen ermöglicht.

Zur Illustration des formalistischen Standpunkts schließen wir dieses Kapitel mit einem neueren Kommentar zum Formalismus.

H. Dales über Formalismus

„ … mathematicians are ambivalent between realism [Platonismus] and formalism. For example, I quote from Davis and Hersh (1981, p. 320):

> *… the typical working mathematician is a [realist] on weekdays and a formalist on Sundays. That is, when he is doing mathematics he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of this reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all.*

… It seems to me that most mathematicians are formalists for all the days of the week. It is of course very useful when seeking proofs within the formal system to have a 'realistic picture' in one's mind, and so it is temporarily convenient … to be a realist …

I think that the success of the major mathematicians in resolving problems and advancing the subject owes much to their ability to formulate in their mind an appropriate image of the abstract problem: it must be sufficiently subtle and complicated to capture the essential features of the question at issue, yet remain sufficiently simple to allow our limited minds absolutely and fully to explore, in quiet contemplation, all aspects of this image until we understand it sufficiently to begin the attempt to transfer this understanding to a written account of the general, abstract situation …

Thus my view is that we are genuine, believing formalists who temporarily act as realists for reasons of expediency in solving problems.

… The first remark is that formalists practically never use a truly formal language in their writings (and may not know to do this, even under pressure); they formulate their theorems in the naive language of set theory developed in the XIX$^{\text{th}}$ century by Dedekind and Cantor. But they are confident that, if their results had to be formalized, this could be done; and doubtless they are correct in this."

(H. Dales, „The mathematician as a formalist". In: Dales, Olivieri 1998, „Truth in Mathematics")

3. Mengen und Klassen

Dieses Kapitel bringt keine wesentlich neuen Gesichtspunkte der Axiomatik ZFC. Es gehört aber zur Diskussion des formalen Rahmens dieser Theorie, und zudem hat es aus ästhetischen Gründen hier seinen Platz, damit wir im zweiten Teil des Buches zur weiteren Entwicklung der axiomatischen Mengenlehre die bequeme Klassensprechweise bereits zur Verfügung haben und nicht mit einer Flut von Definitionen beginnen müssen. Am Ende des Kapitels besprechen wir kurz alternative Axiomensysteme, in denen echte Klassen echten Objektstatus genießen.

Außer Mengen gibt es in ZFC keine Objekte. Jedoch ist es bequem und suggestiv, auch über sogenannte Klassen reden zu können. Die Intuition ist hierbei: Mengen sind kleine Klassen, und Klassen, die keine Mengen sind – sogenannte echte Klassen – sind zu groß, um noch Mengen zu sein. Oder: Echte Klassen sind unbeschränkte Teile des Mengenuniversums – so wie unendliche Mengen von natürlichen Zahlen unbeschränkte Teile von $\mathbb{N}$ sind.

Bei der Diskussion der ZFC Axiome haben wir bewiesen:

$\neg \exists z\, \forall y\;\; y \in z$,

$\neg \exists z\, \forall y.\; y \in z \leftrightarrow y \notin y$.

Diese Ergebnisse können wir suggestiv schreiben als:

$\neg \exists z\;\; z = \{ x \mid x = x \}$,

$\neg \exists z\;\; z = \{ x \mid x \notin x \}$.

Das Paarmengen- und das Potenzmengenaxiom besagen:

$\forall x, y\, \exists z\, \forall u.\; u \in z \leftrightarrow u = x \lor u = y$,

$\forall x\, \exists z\, \forall u.\; u \in z \leftrightarrow u \subseteq x$,

mit der Abkürzung $u \subseteq x = \forall z.\; z \in u \;\rightarrow z \in x$.
Auch diese Axiome können wir suggestiv notieren als:

$\forall x, y\, \exists z\;\; z = \{ u \mid u = x \lor u = y \}$,

$\forall x\, \exists z\;\; z = \{ u \mid u \subseteq x \}$.

Allgemein können wir Ausdrücke der Form $\{ x \mid \varphi(x) \}$ – oder noch allgemeiner $\{ x \mid \varphi(x, p_1, \ldots, p_n) \}$ für bestimmte Mengen (Parameter) $p_1, \ldots, p_n$ – als Abkürzungen verwenden, etwa in den Formen

(α) $y \in \{ x \mid \varphi(x) \}$,

(β) $z \subseteq \{ x \mid \varphi(x) \}$,

(γ) $\{ x \mid \varphi(x) \} \subseteq \{ x \mid \psi(x) \}$,

(δ) $z' = \{ x \mid \varphi(x) \}$,

die nichts anderes bedeuten sollen als:

(α) $\varphi(y)$,

(β) $\forall x \in z \ \ \varphi(x)$,

(γ) $\forall x.\ \varphi(x) \to \psi(x)$,

(δ) $\forall x.\ x \in z' \leftrightarrow \varphi(x)$.

Klassen

Definition *(Klassen und die Konvention „Mengen sind Klassen")*

(i) Ist $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ eine Formel der Mengenlehre, und sind $p_1, \ldots, p_n$ Mengen, so heißt

$\{ x \mid \varphi(x, p_1, \ldots, p_n) \}$

die zu φ *gehörige Klasse (bzgl.* $p_1, \ldots, p_n$*)*, gelesen:

„die Klasse aller (Mengen) x mit $\varphi(x, p_1, \ldots, p_n)$".

(ii) Jede Menge y können wir wegen des Extensionalitätsaxioms als Klasse auffassen, indem wir y mit $\{ x \mid x \in y \}$ identifizieren.

Nach (ii) ist also jede Menge eine Klasse. Bei der Identifikation von y mit $\{ x \mid x \in y \}$ wird die Formel $\varphi(x, y) = x \in y$ mit y als Parameter verwendet.

Klassen bezeichnen wir in der Regel mit großen oder fettgedruckten Buchstaben A, **A**, B, **B**, … Die Bezeichnung erfolgt oft in der Form $A = \{ x \mid \varphi(x) \}$.

Definition *(das mengentheoretische Universum V)*

Die Klasse $V = \{ x \mid x = x \}$ heißt *die Allklasse* oder *das mengentheoretische Universum.*

Wir verwenden Klassen informell als Objekte, streng genommen ist eine Klasse aber nichts anderes als eine Formel der Mengenlehre (evtl. mit Parametern). Klassen sind in diesem Sinn lediglich gut manipulierbare Sprachobjekte, und es wäre unbequem, auf diesen Komfort zu verzichten. Eine Aussage, die Klassen enthält, steht als Mitteilung für einen „echten" Satz der Sprache $\mathscr{L}$ der Mengenlehre (vgl. die Klassen- und $\mathscr{L}$-Formen von (α) – (δ) oben).

Definition *($A = B$, $A \subseteq B$ für Klassen, echte Klassen)*

Seien $A = \{ x \mid \varphi(x) \}$, $B = \{ x \mid \psi(x) \}$ Klassen (aus Notationsgründen unterdrücken wir Parameter). Dann definieren wir:

(i) $A = B$ als die Formel $\forall x.\ \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$,

(ii) $A \in B$ als die Formel $\exists x.\ x \in B \land x = A$,

(iii) $A \subseteq B$ als die Formel $\forall x.\ x \in A \to x \in B$,

(iv) A ist eine Menge als $A \in V$ (also als $\exists x\ x = A$),

(v) A ist echte Klasse als $A \notin V$ (also als $\neg \exists x\ x = A$).

Sind A oder B Mengen, so stimmen diese Definitionen mit den alten überein. Insbesondere gilt dann für jede Menge x, dass $x = \{ y \mid y \in x \}$.

Weiter haben wir für Mengen x und Klassen $A = \{ y \mid \varphi(y) \}$ die folgenden Auflösungen von Ausdrücken, die x und A enthalten:

$x \in A$ ist die Formel $\varphi(x)$,

$x = A$ ist die Formel $\forall z.\ z \in x \leftrightarrow z \in A$,

$A \in x$ ist die Formel $\exists z.\ z \in x \land z = A$,

$A \subseteq x$ ist die Formel $\forall y.\ y \in A \to y \in x$.

Schließlich vereinbaren wir wieder:

$\forall x \in A\ \varphi$ ist die Formel $\forall x.\ x \in A \to \varphi$,

$\exists x \in A\ \varphi$ ist die Formel $\exists x.\ x \in A \land \varphi$.

Die Antinomie von Russell und Zermelo wird, wie erwähnt, zum Satz der Mengenlehre: „$R = \{ x \mid x \notin x \}$ ist eine echte Klasse“. Ebenso ist V eine echte Klasse. Wir können die Antinomien der naiven Mengenlehre also interpretieren als: „Es gibt Mengen und echte Klassen.“

Übung

Seien A, B Klassen. Dann gilt:

(i) $A \in B$ folgt $A \in V$ (d. h. eine Klasse hat nur Mengen als Elemente).

(ii) Ist A eine echte Klasse und $A \subseteq B$, so ist B eine echte Klasse.

[Verwendung des Aussonderungsschemas.]

Operationen mit Klassen

Definition *($A \cap B$, $\bigcap A$, $A \times B$, usw. für Klassen)*

Seien $A = \{ x \mid \varphi(x) \}$, $B = \{ x \mid \psi(x) \}$ Klassen (wieder ohne Angabe von Parametern). Dann definieren wir:

(i) $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$ $(= \{ x \mid \varphi(x) \vee \psi(x) \})$,

(ii) $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$ $(= \{ x \mid \varphi(x) \wedge \psi(x) \})$,

(iii) $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \notin B \}$ $(= \{ x \mid \varphi(x) \wedge \neg\, \psi(x) \})$,

(iv) $\bigcup A = \{ x \mid \text{es gibt ein } y \in A \text{ mit } x \in y \}$,

(v) $\bigcap A = \{ x \mid \text{für alle } y \in A \text{ gilt } x \in y \}$,

(vi) $A \times B = \{ x \mid \text{es gibt } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = (a, b) \}$,

(vii) $\mathcal{P}(A) = \{ x \mid \text{für alle } y \in x \text{ gilt } y \in A \}$.

Ob man in $\{ x \mid \varphi(x) \}$ die Formel φ umgangssprachlich notiert oder als $\mathcal{L}$-Formel ist Geschmackssache. In jedem Falle wird man aber Abkürzungen verwenden wie „$x = (a, b)$“ oder „x ist Funktion“, und damit um umgangssprachliche Formen nicht herumkommen. Dann ist etwa „$\forall x \in y.$ x ist Funktion $\wedge$ $\mathrm{dom}(x) = \omega$“ eine Mischform. Das gleichwertige „jedes $x \in y$ ist eine Funktion auf ω“ ist besser lesbar. Quantoren auszuschreiben ist oft schöner und hilft, syntaktische Wüsten und Privatnotationen zu vermeiden.

Sind die Klassen A und B Mengen, so stimmen die neuen Definitionen mit den alten überein.

Wir betrachten einige einfache Beispiele.

Beispiele

(1) $\bigcap \{ A, B \} = A \cap B$,

(2) $\bigcup \emptyset = \emptyset$,

(3) $\bigcup V = V$,

(4) $\bigcap V = \emptyset$,

(5) $\bigcap \emptyset = V$.

Zu Beispiel (4) beobachten wir, dass die leere Menge ein Element von V ist. Hinsichtlich (5) gilt: Jede Menge ist ein Element von jedem Element der leeren Menge.

Relationen und Funktionen auf Klassen

Wir erweitern nun die Begriffe der Relationen und Funktionen auf Klassen.

Definition *(Klassen als Relationen und Funktionen)*

Seien A, B, C Klassen.

(i) A heißt *(zweistellige) relationale Klasse auf B* oder kurz *Relation auf B*, falls $A \subseteq B \times B$, d. h. falls jedes $x \in A$ ein geordnetes Paar mit Elementen aus B ist.

(ii) A heißt *(einstellige) funktionale Klasse* oder kurz *Funktion*, falls A Relation auf V ist und für alle x, y, z gilt:
$(x, y) \in A$ und $(x, z) \in A$ *folgt* $y = z$.

(iii) Eine Funktion A heißt *injektiv*, falls für alle x, y, z gilt:

$(x, z) \in A$ und $(y, z) \in A$ *folgt* $x = y$.

(iv) Ist A Funktion, so heißt

$\mathrm{dom}(A) = \{ x \mid \text{es gibt ein } y \text{ mit } (x, y) \in A \}$

der Definitionsbereich [engl. domain] von A, und

$\mathrm{rng}(A) = \{ y \mid \text{es gibt ein } x \text{ mit } (x, y) \in A \}$

der Wertebereich [engl. range] von A.

(v) Eine Funktion A heißt *Funktion auf B*, falls $\mathrm{dom}(A) = B$.

(vi) A heißt *Funktion von B nach C*, in Zeichen $A : B \to C$, falls A Funktion auf B und $\mathrm{rng}(A) \subseteq C$.

(vii) $A : B \to C$ heißt *surjektiv*, falls $\mathrm{rng}(A) = C$.

(viii) $A : B \to C$ heißt *bijektiv*, falls A injektiv und surjektiv.

Ist F eine Funktion, so schreiben wir wie üblich $F(x) = y$ für $(x, y) \in F$. Analog sind mehrstellige Relationen A auf B ($A \subseteq B \times \ldots \times B$) und mehrstellige Funktionen definiert, sowie Schreibweisen $F : A_1 \times A_2 \ldots \times A_n \to B$, usw.

Ist F eine n-stellige Funktion, so schreiben wir im Folgenden suggestiv

$\{ F(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n) \}$ *für*

$$\{ z \mid \text{es existieren } x_1, \ldots, x_n \text{ mit } z = F(x_1, \ldots, x_n) \text{ und } \varphi(x_1, \ldots, x_n) \}.$$

So ist etwa

$$\{ (x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B \} = \{ z \mid \text{es existieren } x \in A \text{ und } y \in B \text{ mit } z = (x, y) \} \; (= A \times B).$$

Auch die Elementrelation können wir als echte Klasse betrachten:

Definition

$\in \;=\; \{ (a, b) \mid a \in b \}$.

Häufig gebraucht werden:

Definition *(Bild, Einschränkung, Umkehrfunktion, Verkettung, Identität)*

Seien F, G Funktionen, und sei X eine Klasse.

(i) $F''X = \{ F(x) \mid x \in \mathrm{dom}(F) \text{ und } x \in X \}$ heißt *das Bild von X (unter der Funktion F)*.

(ii) $F|X = F \cap (X \times V)$ heißt *die Einschränkung von F auf X* (genauer: *auf die Klasse $X \cap \mathrm{dom}(F)$)*.

(iii) Ist F injektiv, so heißt $F^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in F \}$ *die Umkehrfunktion von F.*

(iv) $G \circ F = \{ (x, z) \mid x \in \mathrm{dom}(F), F(x) \in \mathrm{dom}(G), z = G(F(x)) \}$ heißt *die Verkettung von F und G.*

(v) $\mathrm{id} = \{ (x, x) \mid x \in V \}$ heißt *die Identität (auf V)*, $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}|A$ *die Identität auf A*.

In der Literatur ist auch $F[X]$ für $F''X$ üblich. In der Mengenlehre vermeidet man dagegen die in der Analysis bevorzugte Schreibweise f(X) aufgrund der Verwechslungsgefahr mit der Funktionsanwendung.

Es gibt viele elementare Eigenschaften dieser Begriffe, z. B.:

(α) Ist F injektiv, so ist $F^{-1} : \mathrm{rng}(F) \to \mathrm{dom}(F)$ bijektiv.

(β) Sind $F : A \to B$ und $G : B \to C$ bijektiv, so ist $G \circ F : A \to C$ bijektiv.

(γ) Sind $F : A \to B$, $G : B \to C$, $H : C \to D$ Funktionen, so ist

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F).$$

(δ) Sind $F : A \to B$ und $G : C \to D$ Funktionen und ist

$$F|(A \cap C) = G|(A \cap C),$$

so ist

$F \cup G : A \cup C \to B \cup D$ eine Funktion, usw.

Auch Relationen R und S kann man miteinander verketten:

$$R \circ_{\mathrm{Rel}} S = \{ (x, z) \mid \text{es gibt ein } y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S \}.$$

Sind F, G Funktionen, so gilt $G \circ F = F \circ_{\mathrm{Rel}} G$.

Geordnete Paare

Eine kleine formale Schwierigkeit tritt auf bei der Behandlung von „Strukturen“ der Form $S = (A, B)$, wobei hier (zumeist) $B \subseteq A \times A$ gilt. Ist A eine echte Klasse, so können wir die übliche Paardefinition $(A, B) = \{ \{ A \}, \{ A, B \} \}$ nicht verwenden, da Mengen nur Mengen als Elemente haben. Wir verwenden aber dennoch *die Bezeichnung* (A, B) und sagen

„Sei (A, B) eine Struktur mit … “ *anstelle des formal korrekten*

„Seien A, B Klassen, $B \subseteq A \times A$ und es gelte … “, usw.

Alternativ kann man (A, B) definieren durch:

$$(A, B) = \begin{cases} \{ \{ A \}, \{ A, B \} \}, & \textit{falls} \ \text{A und B Mengen sind,} \\ A \times \{ 0 \} \cup B \times \{ 1 \}, & \textit{falls} \ \text{A echte Klasse oder B echte Klasse.} \end{cases}$$

Häufig schreiben wir auch $\langle A, B \rangle$ für (A, B). Standardbeispiele sind:

$\langle A, \in \cap (A \times A) \rangle$ oder kurz $\langle A, \in | A \rangle$ oder noch kürzer notiert als $\langle A, \in \rangle$.

Aussagen mit Klassen und das Prinzip der Elimination

Ein Satz der Form „Sei A eine Klasse mit … Dann gilt … “ ist als ein Theoremschema anzusehen. So wie das Aussonderungsschema aus unendlich vielen Axiomen besteht – eines pro Formel –, besteht ein solches Theoremschema aus unendlich vielen Sätzen – je ein Satz pro Klasse/Formel. Analog ist ein Beweis eines Theoremschemas streng genommen ein Beweisschema. Ein Beweis von

„Zu einer Klasse A existiert genau eine Klasse B mit … “

zeigt uns:

(1) wie wir aus der A definierenden Formel φ eine B definierende Formel ψ mit den gewünschten Eigenschaften konstruieren können (effektiv auf dem Papier),

(2) dass $B = B'$ gilt, falls B' eine weitere durch ψ' definierte Klasse mit den gewünschten Eigenschaften ist, d. h. der Beweis zeigt:
Für alle x gilt: $\psi(x)$ *gdw* $\psi'(x)$.

Setzt man in ein Theoremschema „Für alle Klassen A … “ speziell $\varphi = x \in y$ ein, d. h. bildet den Satz des Schemas für $A = \{ x \mid x \in y \}$, so erhält man das Analogon des Schemas für Mengen. Die entsprechenden Sätze für Mengen werden also automatisch mitbewiesen.

Grundsätzlich gilt: Klassen lassen sich im Prinzip aus Definitionen und Theoremen immer entfernen, indem sie durch Formeln ersetzt werden. In der Praxis ist aber die Durchführung einer solchen Elimination nicht erforderlich und wäre wegen der suggestiven Stärke der Klassensprechweise auch nicht wünschenswert. Generell gilt: Keine Angst vor Klassen, auch nicht in ZFC.

Klassen in Rekursionen

Ein wichtiges Beispiel für eine Umwandlung von Formeln haben wir bereits im Allgemeinen Rekursionssatz kennengelernt: Für jede Funktion $F : V \to V$ existiert genau eine Funktion G auf den Ordinalzahlen mit $G(\alpha) = F(G | W(\alpha))$ für alle Ordinalzahlen α. Ist $\varphi(x, y)$ die definierende Formel von F, so können wir die definierende Formel $\psi(\alpha, x)$ von G aus dem Beweis des Rekursionssatzes ablesen. Sie lautet:

$\psi(\alpha, x)$ = „es gibt eine Funktion $g : W(\alpha + 1) \to V$ mit
$\varphi(g | W(\beta), g(\beta))$ für alle $\beta \leq \alpha$, und es gilt $x = g(\alpha)$".

ψ ist eine $\mathscr{L}$-Formel. Der Beweis des Rekursionssatzes zeigt, dass diese Formel ψ eine Funktion G definiert, d.h. der Beweis zeigt: $\forall \alpha\, \exists!\, x\, \psi(\alpha, x)$, wobei $\forall \alpha$ = „für alle Ordinalzahlen α". Weiter zeigt der Beweis, dass jede andere G definierende Formel zu ψ äquivalent ist.

In dieser Weise ist dann etwa $x \in V_\alpha$ eine $\mathscr{L}$-Formel, mit der üblichen rekursiven Definition der V_α-Hierarchie. Wir müssen solche Formeln nicht ausschreiben, aber im Prinzip könnten wir es tun. Wichtig ist, dass uns ZFC erlaubt, rekursive Definitionen über echte Klassen, etwa über alle Ordinalzahlen, durchzuführen. Dabei wird eine funktionale Klasse in eine andere übergeführt, und wir haben dann Zugriff auf die rekursiv definierten Objekte: Ganz so, wie wir für jedes α die Menge $\{ \alpha \}$ betrachten können, können wir für jedes α die Menge V_α betrachten und damit arbeiten. Die resultierende Definition von V_α wollen wir als ein letztes konkretes Beispiel der Auflösung einer Rekursion noch einmal explizit ausschreiben:

V_α = „das eindeutige x mit:

es gibt eine Funktion $g : W(\alpha + 1) \to V$ mit:

$g(0) = \emptyset$,

$g(\beta + 1) = \mathcal{P}(g(\beta))$ für alle $\beta < \alpha$,

$g(\lambda) = \bigcup_{\beta < \lambda} g(\beta)$ für alle Limiten $\lambda \leq \alpha$,

$x = g(\alpha)$."

Der Ausdruck: „z = ‚das eindeutige x mit $\psi(x)$'" meint zunächst, dass wir die Aussage $\exists!\, x\, \psi(x)$ beweisen können. In der weiteren Verwendung von z in Formeln ist dann „z = u" oder „u = z" identisch mit $\psi(u)$, „$u \in z$" identisch mit $\exists x.\ \psi(x) \land u \in x$, und schließlich „$z \in u$" identisch mit $\exists x.\ \psi(x) \land x \in u$. In dieser und keiner anderen Weise taucht dann etwa V_α in einer Formel auf, so etwa in: „für alle Ordinalzahlen α gilt $\alpha \subseteq V_\alpha$", nach $\in$-Auflösung der Abkürzung $\alpha \subseteq V_\alpha$. Nachdem man sich diese Dinge einmal klar gemacht hat, kann man dann mit diesem stillen Hintergrundwissen mit den in der Mengenlehre sehr häufig rekursiv definierten Objekten so v frei umgehen wie mit allen anderen Objekten.

Klassen als echte Objekte

Der Leser mag sich fragen, warum Klassen nicht offiziell als Objekte zugelassen sind, wenn sie sich größtenteils vernünftig benehmen und man mit ihnen viele vertraute Operationen durchführen kann.

In der Tat liegt dies nicht daran, dass man Klassen nicht axiomatisch in den Griff bekommen würde: Es gibt alternative Systeme – NBG von Neumann-Bernays-Gödel und das System MK von Morse-Kelley –, die neben Mengen auch Klassen als Objekte zulassen. Wir werden diese Systeme unten kurz beschreiben.

ZFC hat aber neben seiner Natürlichkeit weitere Vorteile: Die Theorie ist in metamathematischen Untersuchungen einfacher zu handhaben. Zudem kann man Klassen zumeist ohne Scheu verwenden durch die „Klassen sind Formeln"-Konvention. Bei obigen Alternativen kann man sofort die (platonische) Frage nach Meta- oder Superklassen aufwerfen. Cantor hätte echte Klassen als Objekte sicherlich abgelehnt. Für ihn waren „inkonsistente Vielheiten" zwar benennbar, aber keine echten Gegenstände der Theorie. Man kann über die „Vielheit aller Ordinalzahlen" reden, und auch Operationen mit ihnen, etwa in „die Vielheit aller Paare von Ordinalzahlen" machen Sinn, aber man hat die Ordinalzahlen Ω oder $\Omega \times \Omega$ nie als fertiges Ganzes. ZFC folgt in diesem Sinne der Cantorschen Sicht der Dinge.

Das System NBG

NBG steht für „von Neumann, Bernays, Gödel". John von Neumann hat zwischen 1925 und 1928 eine Axiomatik entwickelt, in der echte Klassen als Objekte zugelassen sind. Paul Bernays untersuchte zwischen 1935 und 1954 ein ähnliches System, und Gödel formulierte 1940 eine auf den Ideen von von Neumann und Bernays ruhende Axiomatik mit Klassen. Diese Systeme lassen sich sehr natürlich in einer Weise formulieren, in der die Unterschiede zu ZFC minimalisiert sind. (Das originale System von von Neumann benutzt den Funktionsbegriff als Grundbegriff anstatt der Elementrelation.)

Die Sprache von NBG ist die von ZFC, also $\mathcal{L}$. Wir schreiben aber die Variablen nun in Großbuchstaben X, Y, Z, und nennen die Objekte der Theorie nun nicht Mengen, sondern Klassen. Wir definieren dann:

(+) X ist eine Menge *als die Formel* $\exists Y\ X \in Y$.

Eine Klasse X heißt *echte Klasse*, falls X keine Menge ist.
Für alle Formeln φ definieren wir dann die Mengenquantifikation durch:

$\forall x\ \varphi$ *als die Formel* $\forall X$. X ist eine Menge $\to \varphi(X)$,

$\exists x\ \varphi$ *als die Formel* $\exists X$. X ist eine Menge $\wedge\ \varphi(X)$.

Damit treten in Formeln Variablen x, y, z, X, Y, Z auf, die für Mengen bzw. Klassen stehen. Unsere Theorie enthält aber offiziell nur einen Typ von Objekten, genannt Klassen. Manche dieser Klassen sind Mengen, nämlich genau die, die sich in einer Klasse als Element finden. Wir haben definiert, was „X ist Menge“ heißen soll, so wie wir in ZFC definiert haben, was $x \subseteq y$ bedeuten soll.

Die Axiome von NBG sind nun:

Extensionalitätsaxiom (EXT)

$\forall X, Y.\ X = Y \leftrightarrow \forall z.\ z \in X \leftrightarrow z \in Y$

Die Axiome (LM), (PA), (VER), (POT), (UN), (FUN)

Diese Axiome sind identisch mit denen von ZFC.

Komprehensionsschema (KOM)

$\forall P_1, \ldots, P_n\ \exists Y\ \forall u.\ u \in Y \leftrightarrow \varphi(u, P_1, \ldots, P_n)$

wobei $\varphi(u, P_1, \ldots, P_n)$ eine Formel ist, die lediglich Mengenquantoren enthält, d. h. alle Quantoren in φ sind von der Form $\forall x$ oder $\exists x$. (Dagegen erlauben wir allgemeine Klassenparameter $P_1, \ldots, P_n$.)

Ersetzungsschema (ERS)

$\forall F\ \forall x.\ F \text{ Funktion} \rightarrow \exists y\ \forall v.\ v \in y \leftrightarrow \exists u \in x\ (u, v) \in F$,

wobei „F Funktion“ = „F ist rechtseindeutige Klasse von geordneten Paaren“ wie üblich definiert ist.

Auswahlaxiom (AC)

$\exists F.\ F \text{ Funktion} \wedge \forall x.\ \exists y \in x \rightarrow \exists z \in x\ (x, z) \in F.$

Der wesentliche Unterschied zu ZFC ist also: Wir dürfen volle Komprehension (über Formeln ohne Klassenquantifizierungen) bilden, und erhalten Objekte. Sind diese Objekte zu groß, so tauchen sie in keinen anderen Objekten mehr als Elemente auf. Die echten Klassen bilden in gewisser Weise den Abschluss der Mengenwelt, man nimmt ihren Rand noch mit auf.

Es existiert nun die Russell-Zermelo-Klasse $R = \{ x \mid x \notin x \}$, liefert aber keinen Widerspruch mehr. Das übliche Argument zeigt lediglich, dass R eine echte Klasse ist. Es gilt $R \notin R$. Analog existiert die echte Klasse $V = \{ x \mid x \text{ ist Menge} \} = \{ x \mid \exists x\ x = x \}$ nach dem Komprehensionsschema.

Weiter haben wir in NBG eine starke Form des Auswahlaxioms, eine globale Auswahlfunktion F auf der Klasse aller nichtleeren Mengen $V - \{ \emptyset \}$. Derartige globale Auswahlfunktionen F – genauer: Formeln, die F definieren – hat man in ZFC i. A. nicht (man hat sie aber z. B. in ZFC + „$V = L$“).

NBG beweist den folgenden Satz über Klassen, der im originalen System von von Neumann sogar ein Axiom ist, und der an Cantors Idee des „Hineinprojizierens“ erinnert (vgl. 2.13):

Satz *(von-Neumann-Charakterisierung der Mengen in NBG)*

Für alle X sind äquivalent:

(i) X ist eine Menge.

(ii) Es gibt kein $F : X \to V$ surjektiv (mit $V = \{ x \mid x \text{ ist Menge} \}$).

NBG hat dagegen keine wirklich neuen Axiome. Für das System NBG gilt zudem, dass eine Aussage, die nur Mengenquantoren enthält, in NBG – (AC) genau dann beweisbar ist, wenn sie in ZF beweisbar ist [Shoenfield 1954], und das gleiche gilt für NBG und ZFC. Die Verwendung von echten Klassen in NBG und eine globale Auswahlfunktion liefern keine neuen Erkenntnisse über Mengen.

Andererseits ist NBG im Gegensatz zu ZFC endlich axiomatisierbar: NBG enthält zwar wie ZFC ein unendliches Axiomschema in Form der Komprehension, jedoch gibt es ein zu NBG äquivalentes Axiomensystem bestehend aus Axiomen $A_1, \ldots, A_n$. Damit ist dann $B = A_1 \land \ldots \land A_n$ eine einzige zu NBG (und, was Mengen betrifft, zu ZFC) äquivalente Aussage, eine Art Weltformel.

Eine etwas andere Formulierung des Systems NBG verwendet eine Sprache $\mathscr{L}^*$ mit zwei Sorten von Variablen, nämlich Mengenvariablen x, y, z …, und Klassenvariablen X, Y, Z, … Axiome, die diese beiden Variablen miteinander in Verbindung bringen sind dann „jede Menge ist eine Klasse“ und „jede Klasse enthält nur Mengen als Elemente“, also $\forall x\, \exists Y\, x = Y$ und $\forall X, Y.\ X \in Y \to \exists z\, X = z$. Ansonsten ist das System analog.

Obwohl ZFC und NBG sehr ähnlich sind, ist an vielen Stellen Vorsicht geboten. So gilt z. B. in NBG nicht, dass für jede echte Klasse X jede Wohlordnung $\langle X, < \rangle$ von X (im Sinne der Diskussion in „Geordnete Paare“ oben) gleichlang mit $\langle \Omega, < \rangle$ ist mit

$\Omega = \{ \alpha \mid \alpha \text{ ist eine Ordinalzahl (und eine Menge)} \}$.

$\langle X, < \rangle = \langle \Omega, < \rangle + \langle \Omega, < \rangle$ macht Sinn und ist länger als $\langle \Omega, < \rangle$.

Weiter gibt es in NBG im Allgemeinen keinen Beweis der φ-Induktion: Die Induktionsaussage $(\varphi(0) \land \forall n \in \omega.\ \varphi(n) \to \varphi(n+1)) \to \forall n \in \omega\ \varphi(n)$ ist i. A. in NBG nur für Formeln φ beweisbar, die lediglich Mengenquantoren enthalten [Mostowski 1951].

Das System MK

MK steht für „Morse, Kelley“. Es unterscheidet sich durch eine sehr naheliegende Liberalisierung der Komprehension. MK ist genau wie NBG, lediglich das Komprehensionsschema lautet nun:

Komprehensionsschema (KOM)

$\forall P_1, \ldots, P_n\ \exists Y\ \forall u.\ u \in Y \leftrightarrow \varphi(u, P_1, \ldots, P_n)$,

wobei $\varphi(u, P_1, \ldots, P_n)$ eine beliebige Formel ist.

Siehe hierzu [Morse 1965], den Anhang von [Kelley 1955] sowie [Wang 1949].

Das System MK ist freier als NBG, es gibt keine Verbote mehr bei der Komprehension, ein Formel-Check auf Klassenquantoren entfällt. Die Restriktion auf spezielle Formeln im Komprehensionsschema von NBG erscheint, öffnet man echten Klassen einmal die Tür, etwas halbherzig.

Das System MK ist im Gegensatz zu NBG nicht mehr endlich axiomatisierbar, und beweist neue Aussagen (metamathematischer Natur) über Mengen ([Kreisel / Levy 1968], [Kurata 1964], [Shepherdson 1951, 1952, 1953]). Das ist kein Grund, von ZFC auf eine Klassentheorie zu wechseln, denn die fehlenden Aussagen über Mengen lassen sich, ebenso wie die Konsistenz der Systeme NBG und MK, in Erweiterungen von ZFC um relativ schwache große Kardinalzahlaxiome beweisen (unerreichbare Kardinalzahlen oder Mahlo-Kardinalzahlen genügen). Erweiterungen von ZFC um solche große Kardinalzahlaxiome erlauben es, Modelle für mengentheoretische Klassentheorien wie NBG und MK in einer Objektwelt ohne Klassen zu untersuchen. Es gibt also keinen Grund für Neid und kein Gefühl des Mangels in einer liberal verstandenen Theorie, die keine Klassen kennt.

Mehr über NBG und MK findet der Leser neben den Originalarbeiten in [Fraenkel / Bar-Hillel / Levy 1973].

Vorläufiges Schlusswort

ZFC, angereichert um eine freie Klassensprechweise, ist bis heute das am meisten verwendete Axiomensystem für die Mengenlehre geblieben, und eignet sich besonders gut zur Gewinnung metamathematischer Resultate. Es ist flexibel, elegant, ausbaufähig, und genießt große Sympathien in weiten Kreisen der mathematischen Welt. Die Problemgeschichte der Mengenlehre spielte bei der Gestaltung von ZFC sicherlich eine große Rolle, allen voran Zermelos Beweis des Wohlordnungssatzes und die naheliegende „zu groß!“-Interpretation der Paradoxien der vollen Mengenkomprehension. Das iterative Mengenkonzept wird in ZFC interessanterweise sehr verschmitzt durch die Hintertür über das Ersetzungsschema und die V_α-Hierarchie implementiert, während sich das System nach außen für die Mathematik als Ganzes offen und natürlich gibt. ZFC ist kein Jahrgangschampagner für Kenner, der einen problemlosen Aufbau des Mengenuniversums begleitet, sondern ein Landwein aus recht bodenständigen Axiomen, der sich besonders auch bei formlosen Anlässen gut anbieten lässt. Aus mengentheoretischer Sicht ist zwischen dem Auswahlaxiom als Axiom und dem Wohlordnungssatz als Denkgesetz wenig Unterschied, aber psychologisch ist das Auswahlaxiom in seinen vielen „offensichtlichen“ Varianten ein rhetorisches Genie. Inwieweit ZFC als eine rustikale ad-hoc-Theorie oder eher als Shakespeare der Mathematik zu betrachten ist, und welche Rolle bühnenwirksamen Einzelaxiomen wie „$V = L$“ und dessen imposantem Gegenchor der großen Kardinalzahlen im mathematischen Theater des 21. Jahrhunderts zugeteilt werden wird, bleibt offen und aufregend.

Rückblickend bildet die Mengenlehre in der Handschrift von Georg Cantor für sich genommen bereits ein vollendetes Ganzes, eine Kathedrale der Mathematikgeschichte. Sie ist nichts, was man als Vorzeit des Eigentlichen abtun könnte. Ist die heutige axiomatische Mengenlehre mit ihrem formalen Fundament auch unstrittig eine würdige architektonische Weiterentwicklung der Cantorschen Ideen, so ist doch von einer detaillierten geschichtlichen Erforschung der für die moderne Mathematik so wesentlichen Jahrzehnte um 1900 noch viel Aufklärung und Anregung zu hoffen. Der Gang der Wissenschaft wie auch ihr zur Ruhe gekommener Bestandteil ist keineswegs so frei von Zufällen und menschlichen, kulturgeschichtlichen Motiven, wie es der Begriff der überprüfbaren Forschung zuweilen suggerieren möchte. Eine dominierende Theorie kann auch eine Blockade sein für etwas Neues innerhalb des Alten und außerhalb des Gewohnten. Cantor, der das Wesen der Mathematik nicht in ihrer Wahrheit oder Beständigkeit, sondern in ihrer Freiheit empfunden hat, trat für eine offene Mathematik ein, wenn er auch unablässig versucht hat, seine Kardinal- und Ordinalzahlen der Welt draußen ans Herz zu legen. Und auch dieser Text hofft, als Bühne für Cantor, Hausdorff und Zermelo, Zuneigung erweckt zu haben auch für eine geisteswissenschaftlich verstandene Mathematik und ihre Genese, ihre Einbettung in die Gezeiten des kulturellen Vor- und Zurückschreitens, für Menschen, die darum rangen, Gedanken für sich selber zu klären, um sie anderen vermitteln zu können: Alles ging, wie so oft, um Sprache. Alles mit dem Ziel, am Ende etwas auf der Zunge zu haben, was es zuvor nicht gab. Etwas, das höchsten Kriterien standhalten kann und nirgendwo hinzuschielen braucht um sich zu rechtfertigen. Die Unendlichkeit der Gedankenwelt ist Maß wie Feuerfunke für den schöpferisch tätigen Menschen. In der Mengenlehre wird diese Unendlichkeit selbst zum Thema, und die Mengenlehre ist letztendlich nur ein exemplarisches Studienmaterial für die, die die Kontemplation suchen des Seins und des Denkens.

Biographie von Ernst Zermelo (1871 – 1953)

27. 7. 1871 Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo wird in Berlin geboren.

1889 – 1894 Studium der Mathematik, Physik und Philosophie in Berlin (1889 – 1890, 1891 – 1894), Halle (1890 – 1891) und Freiburg (1891).

1894 Promotion bei Hermann Schwarz in Berlin mit der hervorragenden Arbeit „Untersuchungen zur Variationsrechnung“.

1894 – 1897 Zermelo arbeitet am Institut für theoretische Physik in Berlin als Assistent bei Max Planck. Er führt eine wissenschaftliche Polemik mit Ludwig Boltzmann über kinetische Gastheorie. Im Juli 1897 schreibt er nach Göttingen an Felix Klein, dass er sich „in einer kleineren Stadt“ in theoretischer Physik habilitieren möchte.

1897 – 1899 Zermelo geht an die Universität Göttingen, wo er sich 1899 mit der Arbeit „Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche“ habilitiert.

1899 – 1905 Privatdozent in Göttingen. Auf Empfehlung von David Hilbert erhält er ein bescheidenes Stipendium für fünf Jahre. Daneben bestreitet er seinen Lebensunterhalt aus den Erträgen eines kleinen Erbes seiner Eltern. Unter dem Einfluss von Hilbert beginnt Zermelo sich mit der Mengenlehre zu beschäftigen. 1901 erscheint Zermelos erste mengentheoretische Arbeit „Über die Addition transfiniter Kardinalzahlen“.

1904 Zermelo findet, einer nicht unbedingt glaubwürdigen Aussage von Gerhard Kowalewski (1876 – 1950) zufolge, einen Tag nach dem Vortrag von Julius König auf dem „Internationalen Mathematikerkongreß“ in Heidelberg den Fehler in Königs Widerlegung der Kontinuumshypothese. Wie auch immer: Zermelo beschäftigt sich 1904 mit dem Wohlordnungsproblem, und teilt Hilbert brieflich am 24. 9. 1904 mit, dass er einen Beweis für den Wohlordnungssatz gefunden habe, wobei Diskussionen über das Problem mit Erhard Schmidt eine große Rolle gespielt hätten. In den „Mathematischen Annalen“ erscheint im gleichen Jahr die Zermelosche Arbeit „Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.“

1905 Titularprofessor in Göttingen auf Antrag von David Hilbert.

1906 Erkrankung an Lungentuberkulose.

1907 Zermelo kuriert in der Schweiz seine Lungenerkrankung. In Göttingen wird der Konkurrent Felix Bernstein Zielscheibe der Polemik Zermelos (Bernstein wurde in Göttingen ordentlicher Professor für Versicherungsmathematik). Zu einem Lösungsversuch von Bernstein betreffend die Paradoxie aller Ordinalzahlen meint er: „… absoluter Blödsinn, und zwar nach dem Urteile aller denkenden Mathematiker“. Oder: „Herr Bernstein kann überhaupt nach seinem – eigentümlichen – Verhalten in der Kontinuums-Frage … meines Erachtens weder ethisch noch wissenschaftlich mehr ernst genommen werden.“ Oder: „Hilbert hat am Dienstag über meine ‚Wohlordnung‘ in der Mathematischen Gesellschaft gesprochen, und Felix Bernstein war ganz kleinlaut! Das wird aber nicht lange vorhalten.“ Nicht ohne Komik ist: „In der Frage der Wohlordnung hat der ‚Graf‘ [= Bernstein] in Göttingen eine eklatante Niederlage erlitten. König und Peano haben mir verbindliche Briefe geschrieben, auch Jourdain ist auf dem Rückmarsch. Nur Schoenflies quatscht weiter. Borel hält sich in Schweigen.“

1908 Zermelo veröffentlicht in den „Mathematischen Annalen“ die Arbeiten „Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung“ und „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I“, von denen die letzte Zermelo s Axiomatik der Mengenlehre enthält. Im Sommersemester hält er in Göttingen die erste Vorlesung an einer deutschen Universität über „Mathematische Logik“.

1910 Zermelo wird – auf Empfehlung Hilberts – ordentlicher Professor an der Universität Zürich als Nachfolger von Erhard Schmidt. Damit wird ein im gleichen Jahr gestellter Antrag der Fakultät in Göttingen, Zermelo zum außerordentlichen Professor zu ernennen, überflüssig.

1911/12, 1915/1916 Beurlaubungen und Sanatoriumsaufenthalte wegen erneut auftretender Tuberkulose. 1914 Brustkorboperation durch Ferdinand Sauerbruch.

1916 Aufgabe der Stellung in Zürich aus gesundheitlichen Gründen, Versetzung in den Ruhestand. Zudem existiert die insbesondere von Fraenkel verbreitete Hotel-Anekdote, die unten wiedergegeben ist. Ob sie sich wirklich zugetragen hat und für sein Verhältnis zur Universität Zürich von Bedeutung ist, ist zweifelhaft. Zumindest scheint sie der Persönlichkeit Zermelos zu entsprechen.

1921 Zermelo lebt in Freiburg im Ruhestand.

1926 Ordentlicher Professor in Freiburg.

1930 In den „Fundamenta Mathematicae“ erscheint die Arbeit „Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.“

1932 Zermelo gibt „Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts“ heraus, bis heute die einzige Ausgabe der Werke Georg Cantors. Im Vorwort schreibt er mit dem ihm eigenen polemischen Stil: „In der Geschichte der Wissenschaft ist es gewiß ein seltener Fall, wenn eine ganze wissenschaftliche Disziplin von grundlegender Bedeutung der schöpferischen Tat eines einzelnen zu verdanken ist … Möge das Werk in der Form, wie sie hier vorliegt, recht viele Leser finden und in weiten Kreisen der Kenntnis und dem Verständnis des Cantorschen Lebenswerkes dienen im Sinne seines Urhebers und im Geiste echter Wissenschaft, unabhängig von Zeit- und Modeströmungen und unbeirrt durch die Angriffe derer, die in ängstlicher Schwäche eine Wissenschaft, die sie nicht mehr meistern können, zur Umkehr nötigen möchten. Diesen aber, sagt Cantor, ‚kann es leicht begegnen, dass genau an jener Stelle, wo sie der Wissenschaft die tödliche Wunde zu geben suchen, ein neuer Zweig derselben, schöner, wenn möglich, und zukunftsreicher als alle früheren, rasch vor ihren Augen aufblüht – wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vor den Augen des Chevalier de Meré.‘ [Mit de Meré, der eine elementare Rechnung der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht glauben wollte, ist bei Cantor immer auch Kronecker gemeint.]“

1935 Zermelo wird von der nationalsozialistischen Studentenschaft wegen Nachlässigkeiten beim „Hitlergruß“ denunziert. Er verzichtet auf eine weitere Lehrtätigkeit – die „venia legendi“ wäre ihm andernfalls wahrscheinlich entzogen worden.

1946 Rehabilitation. Zermelo ist schwer krank und fast blind. Er nimmt keine Lehrveranstaltungen mehr auf.

21. 5. 1953 Zermelo stirbt in Freiburg.

Abraham Fraenkel über Ernst Zermelo („Hotelanekdote“)

„Obgleich nicht hierher gehörig, seien von diesem genialen und seltsamen Mathematiker, dessen Namen bis heute einen fast magischen Klang behalten hat, einige kaum bekannte Züge berichtet. Ein schlechter Lehrer, kam er in Göttingen nicht vorwärts, obgleich er 1904 einen drei Seiten langen Aufsatz – Beweis des ‚Wohlordnungsgesetzes‘ – publizierte, der die gesamte mathematische Welt in – zustimmende oder ablehnende – Aufregung versetzte; mit seinen Gegnern setzte er sich 1908 in einer Abhandlung auseinander, die an Sarkasmus nicht ihresgleichen in der mathematischen Literatur hat. 1910 wurde er endlich als Ordinarius an die kantonale Universität Zürich berufen. Kurz vor dem Weltkrieg verbrachte er eine Nacht in den bayrischen Alpen und füllte im Meldezettel des Hotels die Rubrik ‚Staatsangehörigkeit‘ mit den Worten aus: ‚Gottseidank kein Schweizer.‘ Das Unglück wollte, dass kurz danach der Leiter des Unterrichtsdepartments des Kantons Zürich im gleichen Hotel wohnte und die Eintragung sah. So konnte er sich nicht mehr lange an der Züricher Universität halten, wurde 1916 pensioniert und übersiedelte nach Deutschland, wo ich, sogar noch von Jerusalem aus, in häufiger wissenschaftlicher Verbindung mit ihm stand. Als ich Zermelos Freund Erhard Schmidt gelegentlich fragte, warum denn Zermelo fast aufgehört habe zu publizieren, erwiderte er, weil er mit seinen Veröffentlichungen niemand mehr zu ärgern erwarten könne.“

(Abraham Fraenkel 1967, „Lebenskreise“)